

ڦيرنر هايزنبرج

المبادئ الفيزيائية

لنظرية الكم

ترجمة

أ.د. محمد صبري عبد المطلب

أ.د. إنتصارات محمد حسن الشبكي



Arab_Books

لمحة عن المؤلف:

فيرنر هايزنبرج

كان فيرنر هايزنبرج Werner Heisenberg (٥ ديسمبر ١٩٠١ – ١ فبراير ١٩٧٦) عالماً ألمانياً في الفيزياء النظرية قدّم إسهامات رائدة في ميكانيكا الكم، وقد اشتهر بتأكيده على مبدأ الشك في نظرية الكم، وله – فضلاً عن ذلك – إسهامات هامة في الفيزياء النووية، ونظرية الحقل الكمي، وفيزياء الجسيمات. وقد فاز هايزنبرج بجائزة نوبل في الفيزياء في عام ١٩٣٢.

المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم

المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم

تأليف

فيرنر هايزنبرج
حاصل على جائزة نوبل

ترجمة

أ.د. / محمد صبري عبد المطلب
أ.د. / انتصارات محمد حسن الشبكي



The Physical Principles of the Quantum Theory

Werner Heisenberg

المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم

فيرنر هايزنبرج

الطبعة الأولى ١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م

ISBN 978 977 6263 26 0

جميع الحقوق محفوظة للناشر (كلمة) وكلمات عربية للترجمة والنشر
(شركة ذات مسئولية محدودة)

كلمة

إن هيئة أبو ظبي للثقافة والتراث (كلمة) غير مسئولة عن آراء المؤلف وأفكاره
وإنما يعبر الكتاب عن آراء مؤلفه
ص.ب. ٢٣٨٠ أبوظبي، الإمارات العربية المتحدة
هاتف: ٦٣١٤٤٦٨ ٢ ٩٧١ + فاكس: ٦٣١٤٤٦٢ ٢ ٩٧١ +
الموقع على شبكة الإنترنت: www.kalima.ae
البريد الإلكتروني: info@kalima.ae

كلمات عربية للترجمة والنشر

إن كلمات عربية للترجمة والنشر غير مسئولة عن آراء المؤلف وأفكاره
وإنما يعبر الكتاب عن آراء مؤلفه
٤٣ شارع ابن قتيبة، حي الزهور، مدينة نصر، القاهرة ١١٤٧١
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٢٧٤٣١ ٢٠٢ + فاكس: ٢٢٧٠٦٣٥١ ٢٠٢ +
البريد الإلكتروني: kalematarabia@kalematarabia.com
الموقع الإلكتروني: <http://www.kalematarabia.com>

هايزنبرج، فيرنر

المبادئ الفيزيائية لنظرية الكم / فيرنر هايزنبرج . - القاهرة : كلمات عربية للترجمة والنشر،
٢٠٠٩

١٨٤ص، ٢١،٠ × ١٤،٥ سم

تدمك: ٩٧٨ ٩٧٧ ٦٢٦٣ ٢٦٠

١- نظرية الكم

أ- عبد المطلب، محمد صبري (مترجم)

ب- العنوان

٥٣٠،١٢

يمنع نسخ أو استعمال أي جزء من هذا الكتاب بأية وسيلة تصويرية أو إلكترونية أو ميكانيكية،
ويشمل ذلك التصوير الفوتوغرافي والتسجيل على أشرطة أو أقراص مضمومة أو استخدام أية وسيلة
نشر أخرى، بما في ذلك حفظ المعلومات واسترجاعها، دون إذن خطي من الناشر.

Arabic Language Translation Copyright © 2009 by Kalima and
Kalamat Arabia

The Physical Principles of the Quantum Theory.

Licensed by The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.

© 1930 by The University of Chicago. All Rights Reserved.

Tele: @Arab_Books

المحتويات

٧	تقديم للطبعة الإنجليزية
٩	مقدمة
١١	١- تمهيد
٢١	٢- نقد المفاهيم الفيزيائية لنظرية الجسيم للمادة
٥٣	٣- نقد المفاهيم الفيزيائية للنظرية الموجية
٦١	٤- التفسير الإحصائي لنظرية الكم
٧١	٥- مناقشة التجارب الهامة
١٠٥	٦- الملحق
١٧٥	المراجع

تقديم للطبعة الإنجليزية

إنه لسرور غير عادي أن أقدم محاضرات شيكاغو للأستاذ هايزنبرج عن «الأسس الفيزيائية لنظرية الكم» وذلك لقاعدة أعرض من القراء عمن استطاعوا حضورها حين ألقيت أصلاً.

فريادة الأستاذ هايزنبرج في تنمية علم ميكانيكا الكم الجديدة يعترف بها هؤلاء المتابعون لإنمائها. وكحقيقة، كان هو أول من رأى بوضوح أننا كنا نصف أطيافنا بدلالة ميكانيكيات ذرية لا يمكن أن تُحصَد بها معرفة محددة، وذلك في الأطر القديمة لنظرية الكم. وهو أول من وجد طريقة لتفسير (أو على الأقل لوصف) الظواهر الطيفية دون فرض لوجود مثل هذه الميكانيكيات الذرية. كما أن «قاعدة عدم اليقين» أصبحت الجملة الشائعة في خلال جامعاتنا، وإنها لفرصة ثمرة أن نتعلم معناها ممن كان مسئولاً عن صياغتها.

وتزايد تأكيد فهمنا الأحسن للأحداث على النطاق الذري بالقوة الكامنة في ميكانيكا الكم الجديدة. فتركيب ذرة الهيليوم، ووجود أنصاف أعداد كم في حزم الأطياف، والتوزيع الفراغي المستمر للإلكترونات الضوئية، كبعض أمثلة تذكر، هي إنجازات للنظرية الجديدة التي كانت تحير القديمة.

ولم تكتمل بعد، بدون شك، كتابة هذا الفصل في تاريخ الفيزياء، إلا أنها قد تقدمت إلى مرحلة التأمل المثمر لاعتبار أهمية ما كتب. وكنا فعلاً محظوظين، في دراستنا هذه، لوجود الأستاذ هايزنبرج لتوجيه أفكارنا.

أرثر هـ. كمبتون

مقدمة

منحتني تلك المحاضرات التي ألقيتها في ربيع عام ١٩٢٩ بجامعة شيكاغو الفرصة كي أراجع مرة أخرى المبادئ الأساسية لنظرية الكم. ومنذ الدراسات الحاسمة لبور Bohr عام ١٩٢٧م لم توجد تعديلات جوهرية في هذه الأسس، كما أن العديد من التجارب قد أكدت أهمية تبعات النظرية (مثل أثر رامان Raman).

وبالرغم من ذلك فإننا نجد اليوم لدى كثير من الفيزيائيين نوعاً من الإيمان بصحة الأسس الجديدة أكثر من الفهم الواضح، لهذا بدت لي مدى الحاجة إلى نشر محاضرات شيكاغو في كتيب صغير.

ونظرًا لأن الوعاء الرياضي لنظرية الكم متاح في عدد من الكتب الممتازة، ومعروف للأغلبية أكثر من فهم الأسس الفيزيائية، فقد ألحقت الكتاب بعضاً من المعادلات.

وفي نص الكتاب حاولت فقط قدر الإمكان استخدام الصيغ الرياضية البدائية والحسابية.

وقد وضعت في نص الكتاب توكيداً خاصاً على التكافؤ التام بين مفهومي الجسيم والموجة، الذي يعكس جلياً الصياغة الجديدة للنظرية.

فمفهوم التماثل الواسع للكتاب بالنسبة للكلمات «جسيم» و«موجة» يبين عدم تحصيل أي شيء من مناقشة القضايا الأولية (مثل السببية) من حيث فصل واحدة عن الأخرى.

وقد حاولت بوضوح قدر الإمكان تبيان الفرق بين المكان-الزمان في النظرية الموجية من جهة وموجات شرودنجر في الفضاء من جهة أخرى. ولا يوجد في الكتاب أي كلمة من المنشورات السابقة، خاصة دراسات بور (Bohr كوبنهاجن-الدمرك)، وقد يجوز لي التعبير بأن الكتاب قد حقق الهدف منه إذا ما ساهم في نشر ما يعرف «بروح كوبنهاجن لنظرية الكم» التي قادت كل التطور في الفيزياء الذرية الحديثة. وأشكر في المقام الأول السادة الدكاترة س. إيكارت Eckart وف. هويت Hoyt من جامعة شيكاغو ليس فقط لجهودهما في الترجمة إلى الإنجليزية، بل أيضاً لجهودهما في تحسين الكتاب بالعمل على العديد من الأجزاء ومنحي ثمار نصيحتهم. كما أنني ممتن للدكتور ج. بك Beek لقراءته مسودة الطبعة الألمانية ولساعدته القيمة في إعداد النص.

ف. هايزنبرج

ليبزج، ٣ مارس ١٩٣٠

الفصل الأول

تمهيد

١- النظرية والتجربة

يمكن وصف تجارب الفيزياء ونتائجها بلغة الحياة اليومية. لذا فإذا ما لم يتطلب الفيزيائي نظرية ما لتفسير نتائجه، واكتفى — قل — بوصف الخطوط المبينة في ألواح فوتوغرافية (مثلاً)، فإن كل شيء سيصبح سهلاً، ولا توجد حاجة لمناقشة المعرفة Epistemological، وتنشأ الصعوبات عند محاولة تصنيف النتائج لإقامة علاقة السبب والآخر بينهما — باختصار، لبناء نظرية.

هذه العملية لا تطبق فقط على نتائج التجربة العلمية، لكن، في مدى العمر، على أبسط خبرات الحياة اليومية، وبهذه الطريقة تكونت كل المفاهيم (Concepts) وفي السياق، فالإثبات العملي ذو الأساس الصلد غالباً ما يترك، وتقبل بدون حرج التعميمات، إلى أن تصبح التناقضات واضحة بين النظرية والتجربة.

ولتجنب هذه التناقضات نرى ضرورة تطلب عدم إدخال أي مفهوم في نظرية ما لم يتم تحقيقه عملياً على الأقل لنفس درجة الدقة للتجارب التي توصف بالنظرية.

وللأسف فمن المستحيل تحقيق هذا المتطلب، حيث الأفكار والكلمات الأكثر شيوعاً سوف تستبعد.

ولتجنب هذه الصعوبات نُصح بإدخال كثير من المفاهيم لنظرية فيزيائية ما، دون محاولة تبريرها بصرامة. ومن ثم يسمح للتجربة أن تقرر عند أي نقط ستكون المراجعة ضرورية.

لذا كان ما يميز النظرية الخاصة للنسبية أن مفاهيم «المسطرة» و«الساعة» كانت عرضة للنقد على ضوء التجربة، حيث يتضح أن المفاهيم العادية تتضمن فرض وجود (في الأساس، على الأقل) إشارات تنتشر بسرعة غير محدودة. وعندما تصبح مثل هذه الإشارات غير موجودة في الطبيعة، فمهمة محو هذا الفرض الضمني من كل الاستنتاجات المنطقية معمول بها، مع نتيجة أنه قد وجد تفسير متوافق للحقائق التي اعتبرت متناقضة، وجلبت النظرية العامة للنسبية أكبر خروج جذري عن المفاهيم الكلاسيكية للعالم، حيث قبلت فقط بدون حرج مفهوم تطابق المكان والزمان. وطبقاً لهذه النظرية، تطبق فقط اللغة العادية (وهي المفاهيم الكلاسيكية) لوصف التجارب التي فيها قد يعتبر كل من ثابت الجاذبية ومقلوب سرعة الضوء مقادير صغيرة مهملة.

وبالرغم من أن نظرية النسبية تتطلب القابلية للفكر المجرد، فإنها لا تزال توفى المتطلبات التقليدية للعلم مادامت تسمح بتقسيم العالم إلى موضوع وشيء (المُلاحِظ والمُلاحَظ) ومن ثم صياغة واضحة لقانون السببية. لكن هذه هي النقطة التي تبدأ عندها صعوبات نظرية الكم، في الفيزياء لا تحتاج مفاهيم «الساعة» و«المسطرة» إلى اعتبار فوري، لوجود مجال كبير للظواهر التي فيها $1/c$ تكون مهملة. ومن الجهة الأخرى، تحتاج مفاهيم «تطابق المكان-الزمن» و«الملاحظات» إلى إجراء تنقيح كامل. ولمتابعة المناقشات يكون التفاعل بين المُلاحِظ والشيء؛ ففي نظريات الفيزياء الكلاسيكية كان دائماً يفترض أن يكون هذا التفاعل صغيراً فيهم، أو غير ذلك، لكن إزالة أثر التفاعل من النتيجة بحسابات على أساس تجارب «كنترول». هذا الافتراض غير مسموح به في الفيزياء النظرية؛ فالتفاعل بين المُلاحِظ والشيء يسبب تغيرات غير محكومة وكبيرة في النظام المشاهد، بسبب التغيرات غير المتصلة المميزة للعمليات الذرية، وتكون النتيجة المباشرة لهذه الحالة أنه في

كل تجربة تجرى لتعيين بعض الكميات العددية تحول معرفة الأخرى إلى وهم، لأن الاضطراب غير المحكوم في النظام المشاهد سيغير من قيم المقادير المعينة سابقًا.

وإذا ما تتبعنا هذه الاضطرابات بتفاصيلها الكمية quantitative، يظهر أنه في حالات كثيرة لا يمكن الحصول على تعيين دقيق أني في نفس الوقت لمقادير متغيرة، بل إنه يوجد حد أدنى للدقة التي بها يمكن معرفة هذه المقادير.^١

إن أول نقطة مبدئية لنقد نظرية النسبية كان الفرض بأنه لا توجد إشارة ذات سرعة أكبر من سرعة الضوء، وبطريقة مماثلة، فإن الحد الأدنى للدقة التي بها يمكن معرفة أنية للمتغيرات يمكن صياغتها كقانون الطبيعة nature (بصورة يطلق عليها علاقات عدم اليقين) وصنعت أول نقطة مبدئية للنقد الذي كوّن موضوع الصفحات التالية.

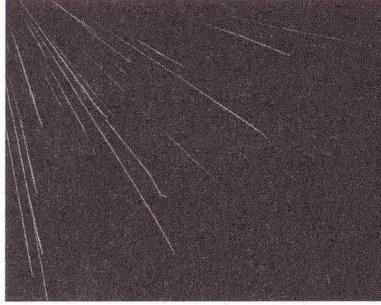
أعطتنا علاقات عدم اليقين ذلك المقياس للتحرر من قيود المفاهيم الكلاسيكية الضرورية للوصف المتوافق للعمليات الفيزيائية. وعليه سيكون برنامج الاعتبارات التالية كما يلي: أولاً، دراسة استقصائية عامة لكل المفاهيم التي اقترح تقديمها بالتجارب الذرية؛ وثانياً، لتحديد نطاق تطبيق هذه المفاهيم؛ ثالثاً، لتبيان أن المفاهيم قد حددت، بجانب الصياغة الرياضية لنظرية الكم من خطة متوافقة ذاتياً.

٢- المفاهيم الأساسية لنظرية الكم

يمكن تقديم أهم مفاهيم الفيزياء الذرية من التجارب التالية:

(أ) صور ويلسن^٢

تسبب أشعة α و β المنبعثة من العناصر المشعة تكثيف قطرات صغيرة عندما يسمح لها بالمرور خلال بخار ماء فوق مشبع، لا تتوزع هذه القطرات عشوائياً، لكنها تترتب على طول مضامير (tracks)، تصبح في حالة أشعة α



شكل ١: مضامير جسيمات- α في حجرة ويلسون.

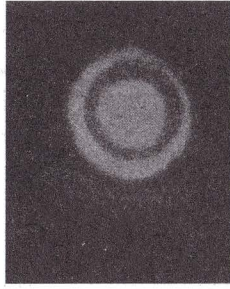
(شكل ١) خطوطاً شبه مستقيمة، بينما في حالة أشعة β تكون منحنية بدون انتظام. إن وجود المضامير واتصالها يظهر أن الأشعة ربما تعتبر كسيل من الجسيمات الصغيرة التي تتحرك بسرعة كبيرة. وكما هو معروف جيداً، يمكن تعيين كتلة وشحنة هذه الجسيمات من انحراف deflection هذه الأشعة بالمجالات الكهربائية والمغناطيسية.

(ب) حيود Diffraction الموجات

(دفسون وجرمر،^٢ وطومسون،^٤ ورَب°)

بعد أن ظل إعتبار أشعة β كسيل من الجسيمات لمدة ١٥ عام بدون تحدي، أجريت سلسلة أخرى من التجارب التي بينت أنها يمكن أن تحيد وقادرة على التداخل وكأنها موجات. فتجربة طومسون نموذج لهذه التجارب وفيها مر شعاع من أشعة β المصنعة ذات طاقة متوسطة خلال شريحة رقيقة من المادة.

تتكون الشريحة من بلورات صغيرة ذات اتجاهات عشوائية، لكن الذرات في كل بلورة مرتبة بانتظام. ويعرض على لوح فوتوغرافي الأشعة الساقطة حلقات من الظلام (شكل ٢) كأن هذه الأشعة موجات قد حيدت بالبلورات الصغيرة. ومن أقطار الحلقات وتركيب البلورات يمكن تعيين



شكل ٢: حيود الإلكترونات بمرورها خلال شريحة رقيقة من المادة.

طول هذه الموجات ووجت لتكون $\lambda = h/mv$ ، حيث m و v هي كتلة وسرعة الجسيمات على الترتيب كما عينت بالتجربة المذكورة سلفاً^٦.

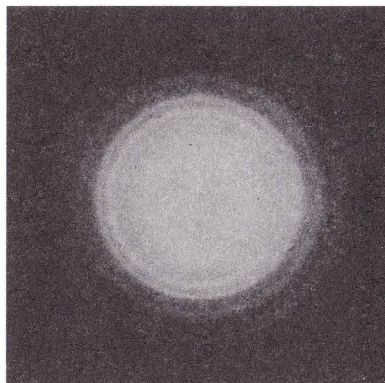
(ج) حيود أشعة X

وكان ضرورياً على وجه العموم اعتبار نفس التفسير المزدوج في حالة الضوء والأشعة الكهرومغناطيسية.

وسادت هذه النظرية غيرها لسنين كثيرة، بعد أن فندت اعتراضات نيوتن على النظرية الموجية للضوء وشرحت ظاهرة التداخل بواسطة فرينل Fresnel، حتى أوضح أينشتين^٧ أن تجارب لينارد على الأثر الكهروضوئي يمكن شرحها بنظرية الجسيمات Corpuscular.

وربط أينشتين بين كمية الحركة (العزم) لجسيمات افتراضية وبين طول الموجة للأشعة بواسطة صيغة مسلّمة هي $p = h/\lambda$ (انظر ٢ب).

وضرورة كلا التفسيرين تكون واضحة على وجه الخصوص في حالة أشعة X: إذا مر شعاع متجانس من أشعة X خلال كتلة بلورية، واستقبلت الأشعة المنبثقة على لوح فوتوغرافي (شكل ٣)، فالنتيجة تكون مماثلة جداً لنتيجة تجربة ج. ب. طومسون، ويمكن استنتاج أن أشعة X تكون شكلاً من الحركة الموجية بطول موجي يمكن تعيينه.

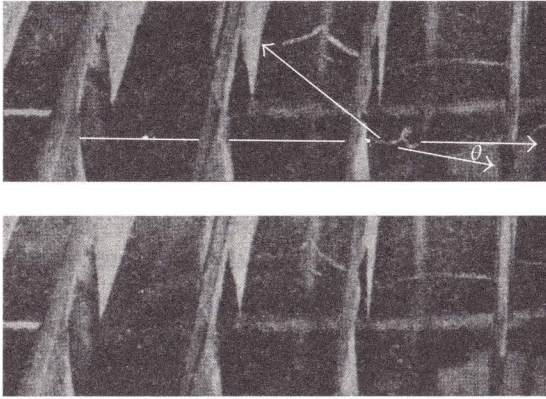


شكل ٣: حيود أشعة X بمسحوق أكسيد ماغنيسيوم MgO.

(د) تجربة كمبتون-سيمون^١

يتشتت شعاع من أشعة X بواسطة الجزيئات إذا مر خلال بخار ماء فوق مشبع. وارتداد الإلكترونات هو نتائج ثانوية للتشتت، والظاهر أن الإلكترونات جسيمات ذات طاقة كبيرة حدثت أنها تكون مضامير من القطرات المكثفة كما فعلت أشعة β وهذه المضامير ليست بطويلة، وتوجد باتجاهات عشوائية. ومن الظاهر أنها نشأت داخل المنطقة التي عبرتها أشعة X.

والنواتج الثانوية للتشتت هي (الكهروضوء) الإلكترونات الضوئية Photoelectrons، التي أكدت نفسها بالمضامير الطويلة لقطرات المياه المكثفة. وتحت ظروف مناسبة، تنشأ هذه المسارات عند نقاط خارج حزمة أشعة X الأولية، لكن ثنائي الناتج الثانوي يكونان على صلة ببعضهما. وإذا ما افترض أن حزمة شعاع X تتكون من سيل من جسيمات الضوء (الفوتونات) وأن عملية التشتت هي اصطدام فوتون مع واحد من إلكترونات الجزيء، ونتيجة لذلك يرد الإلكترون في الاتجاه الملاحظ، ومسلمة أينشتين المعنية بالطاقة وكمية الحركة للفوتونات تمكن من حساب اتجاه الفوتون بعد تصادمه. هذا الفوتون سيصطدم مع جزيء ثان، ويعطي ما تبقى من



شكل ٤: صورة توضح إرتداد الإلكترون والإلكترون الضوئي المصاحب والمحرر بواسطة أشعة X. الصورة العليا توضح الإرتداد بالأسهم.

طاقته إلى إلكترون (كهروضوئي). (شكل ٤) هذا الافتراض قد تحقق كميًا quantitatively.

(هـ) تجارب فرانك وهيرتز للتصادم

عند إمرار شعاع من إلكترونات بطيئة بسرعة متجانسة خلال غاز ما، فإن التيار الكهربائي (الإلكتروني) سيتغير كدالة في السرعة وعند نقطة معينة من السرعة (الطاقة) سيتغير بشكل غير متصل.

وتحليل هذه التجارب أدى إلى استنتاج أنه يمكن للغاز أن تحمل قيم محددة للطاقة (فروض بور). وعندما تكون طاقة الذرة معروفة، نتحدث عن «الحالة الساكنة للذرة». وعندما تكون طاقة الحركة صغيرة جدًا لتحول الذرة من حالتها الساكنة إلى أخرى أعلى، سيعمل الإلكترون صدمة مرنة مع الذرة، لكن عندما تكون طاقة الحركة كافية للإثارة فستنقل بعض الإلكترونات طاقتها للذرة.

لذا كدالة في السرعة فالتيار الكهربى (الإلكترونى) سيتغير بسرعة في المنطقة الحرجة. مفهوم الحالات الساكنة الذى اقترح بواسطة هذه التجارب هو أكثر التعبيرات لعدم الاتصالية في العمليات الذرية.

من هذه التجارب يرى شمول كل من المادة والإشعاعات على ازدواجية في الصفات، حيث تظهر أحياناً خواص الموجات، وأحياناً أخرى خواص الجسيمات، ومن الواضح الآن أن الشيء لا يمكن أن يكون حركة موجية ويتألف من جسيم في نفس الوقت، كلا المفهومين مختلفان جداً.

صحيح أنه يمكن افتراض أن كيانين مختلفان، واحد منهما له كل خصائص الحركة الموجية، والآخر له كل خصائص الجسيم، يندمجان بطريقة ما لتكوين الضوء، لكن هذه النظريات غير قادرة على إيجاد العلاقة الحميمة بين الكيانين ويتطلبها الدليل العلمى، وهناك في الواقع، يكون من المؤكد عملياً فقط أن الضوء يسلك أحياناً وكأنه يمتلك بعض خصائص الجسيمات، لكن لا توجد تجربة تثبت أنه يمتلك كل خواص الجسيم، وتسرى نفس العبارات لحركة المادة والموجة، وحل هذه الصعوبة يكون في أن الصورتين العقليتين اللتين تكونتا لدينا من التجارب — واحدة للجسيم والأخرى للموجات — كليهما يكون غير كامل على حد سواء إلا في صحة القياس الذى يكون دقيقاً فقط في حالات محدودة، ومن السخف القول «لا يمكن القياس على درجة كبيرة من الدقة» إلا أنه ربما تكون مبررة أن تستخدم لوصف الأشياء التى لا يوجد كلمات لها في لغتنا. الضوء والمادة كلاهما كيان منفرد، والازدواجية الظاهرة نشأت في محدودية لغتنا. وتنشأ هذه الازدواجية الظاهرة في القيود المفروضة للغتنا.

وليس من المفاجئ أن تكون لغتنا غير قادرة على وصف العمليات التى توجد داخل الذرات، بسبب — كما ذكر — أن اللغة اخترعت لوصف تجارب الحياة اليومية، التى تتكون من عمليات تتضمن عدداً كبيراً جداً من الذرات. علاوة على ذلك، فإنه من الصعب جداً تعديل لغتنا لتصبح قادرة على وصف هذه العمليات الذرية، لأن الكلمات يمكنها فقط وصف الأشياء التى يمكننا تكوين صورة ذهنية لها، وهذه القابلية هي أيضاً نتاج خبراتنا

اليومية. لحسن الحظ، فالرياضيات لا تخضع لهذه القيود، ويمكن اختراع خطة رياضية — نظرية الكم — وهي ملائمة كلياً لمعالجة العمليات الذرية. وللتصور، على أية حال، يجب حصر أنفسنا في قياسين غير مكتملين — صورة الموجة، وصورة الجسيم — والانطباق المتزامن لكل من الصورتين يكون حينئذ المعيار الطبيعي لتعيين إلى أي مدى تمكن «دفع» كل قياس أو مقارنة وتكوّن نقطة بدء واضحة لنقد المفاهيم التي دخلت النظريات الذرية في مدى نموها، بسبب، وبوضوح، استنتاج النتائج دون تمحيص سيؤدي إلى تناقضات، وبهذه الطريقة سنحصل على القيود بمفهوم الجسيم بالأخذ في الاعتبار مفهوم الموجة، وكما وضح ن. بور،^{١٠} فهذا هو الأساس في الاستنباط البسيط جداً للعلاقات عدم الدقة بين الإحداثي (المكان) وكمية الحركة (العزم) لجسيم ما. وبنفس المنوال نستطيع استنتاج القيود لمفهوم موجة ما بالمقارنة مع مفهوم جسيم ما.

يجب التأكيد على أن هذا النقض لا يمكن أن يكتمل تماماً بدون استخدام الوعاء الرياضي لنظرية الكم، لأن نمو النظرية سبق توضيح الأسس الفيزيائية في السياق التاريخي، ومن أجل تجنب حجب الكثير من العلاقات الأساسية بكثير جداً من الرياضيات، على أي حال، فقد وجد من الحكمة إبعادها إلى ملحق الكتاب، وعرض الرياضيات في ملحق الكتاب لا يدعي أنه كامل، بل يزود القارئ بهذه المعادلات الضرورية لحجية النص، ونشير إلى ملحق هذا الكتاب بـ A (16) إلخ.

الفصل الثاني

نقد المفاهيم الفيزيائية لنظرية الجسيم للمادة

١- علاقات عدم اليقين

مفاهيم السرعة، والطاقة ... إلخ، قد تمت من التجارب البسيطة للأشياء الشائعة، التي فيها يمكن وصف السلوك الميكانيكي للأجسام المكرو سكوبية (الكبيرة نسبيًا) بهذه الكلمات. نفس هذه المفاهيم نقلت إلى الإلكترون، حيث إنه في بعض التجارب الأساسية أظهرت الإلكترونات سلوكًا ميكانيكيًا مثل هذه الأشياء الشائعة.

وحيث إن هذا التشابه، على أي حال، معروف وموجود فقط في نطاق ظواهر محددة، فإن نظرية الجسيم يجب أن تكون محدودة بطريقة مقابلة. وطبقًا لبور،^١ هذه القيود ربما تستنبط من القاعدة أنه يمكن بشكل متساوٍ تصور عمليات الفيزياء الذرية من حيث الموجات أو الجسيمات، لذلك، فالعبارة أن مكان الإلكترون معروف في حدود دقة معينة Δx عند الزمن t يمكن تصورها بصورة حزمة موجة في المكان المناسب بتقريب Δx .

ويقصد بـ«حزمة موجة» اضطراب يشبه الموجة سعته تختلف بشكل ملموس عن الصفر فقط في منطقة مقيدة. هذه المنطقة تكون، بشكل عام، في حركة، وتغير حجمها وشكلها، أي ينتشر الاضطراب. سرعة الإلكترون تقابل سرعة حزمة الموجة، لكن هذه الأخيرة لا يمكن تعريفها بالضبط،

لأنها تنتشر. ويعتبر عدم التحديد هذا صفة أساسية للإلكترون، وليس دليلاً على عدم انطباق الصورة الموجية. نعرف كمية الحركة $p_x = \mu v_x$ (حيث μ = كتلة الإلكترون، v_x = مركبة x للسرعة)، عدم الدقة في السرعة تسبب عدم الدقة في p_x بمقدار Δp_x ومن أبسط قوانين البصريات، مع القانون الوضعي (دي بروي De Broglie) $\lambda = h/p$ ، يمكن أن يظهر بسهولة أن

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (1)$$

افتراض أن حزمة الموجة صنعت من تراكب Superposition مستوى الموجات جيبية الشكل Sinusoidal، كلها ذات طول موجي يقرب من λ_0 . ثم تقريباً، عدد $n = \Delta x / \lambda_0$ قمم أو قاع تقع في حدوده الحزمة. خارج الحد يتلاشى بتداخل موجات مستوى المركبة، ويكون هذا ممكناً إذا وفقط إذا كانت فئة موجات المركبة تحوي بعض الموجات على الأقل $n + 1$ منها تقع في المدى الحرج. هذا يعطي

$$\frac{\Delta x}{\lambda_0 - \Delta \lambda} \geq n + 1,$$

حيث $\Delta \lambda$ هو مدى أطوال الموجات اللازمة لتمثيل الحزمة، وعليه

$$\frac{\Delta x \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \geq 1. \quad (2)$$

ومن جهة أخرى، مجموعة سرعة الموجات (أي سرعة الحزمة) تعطى بالمعادلة A (85).

$$v_g = \frac{h}{\mu \lambda_0}, \quad (3)$$

بحيث إن انتشار الحزمة يكون مميزًا بمدى من السرعات

$$\Delta v_g = \frac{h}{\mu \lambda_0^2} \Delta \lambda.$$

وبالتعريف $\Delta p_x = \mu \Delta v_g$ ، ولذلك بمعادلة (2)

$$\Delta x \Delta p_x \geq h.$$

تحدد علاقة عدم الدقة هذه الحدود التي يمكن أن تطبق صورة الجسيم. أي استخدام للكلمات «مكان» و«سرعة» بدقة تفوق المعطى بالمعادلة* هي مجرد لا معنى لها كاستخدام كلمات معناها غير معرف.

ويمكن استنتاج علاقات عدم الدقة حصرياً بدون صورة الموجة، لأنها يمكن الحصول عليها من رياضيات نظرية الكم، وتفسيراتها الفيزيائية.^٢ أي معرفة للإحداثي q للإلكترون يمكن التعبير عنها بواسطة سعة احتمالية $|S(q')|^2 dq'$ و $S(q')$ هي احتمال أن نجد قيمة عددية للإحداثي الإلكتروني بين q' و $q' + dq'$.
افتراض

$$\bar{q} = \int q' |S(q')|^2 dq' \quad (4)$$

تكون متوسط قيمة q من ثم Δq تعرف بواسطة

$$(\Delta q)^2 = 2 \int (q' - \bar{q})^2 |S(q')|^2 dq' \quad (5)$$

يمكن أن تسمى عدم دقة في معرفة مكان الإلكترون.

* في هذا الصدد يجب تذكر أن اللغة الإنسانية تسمح بتركيب جمل لا تحتوي أي تعريفات ومن ثم ليس لها أي محتوى على الإطلاق — بالرغم من أن هذه الجمل تولد بعض أنواع الصور في مخيلتنا. ومثلاً الجملة التي تقول: إنه بجانب عالمنا يوجد عالم آخر، ولا تؤدي بنا إلى أي نتيجة عملية لكنها تولد نوعاً ما من الصور في الذهن؟ هذه الجملة لا يمكن إثباتها أو نفيها. ويجب أن نكون حذرين عند استخدام الكلمات «في الحقيقة» «الواقع» إلخ، إذ إن هذه الكلمات عادة ما تقود إلى جمل من النوع الذي ذكر أعلاه.

وبطريقة مماثلة تمامًا $|T(p')|^2 dp'$ تعطي احتمالية وجود العزم الإلكتروني بين كل p' و dp' ومرة أخرى \bar{p} و Δp يمكن تعريفها

$$\bar{p} = \int p' |T(p')|^2 dp', \quad (6)$$

$$(\Delta p)^2 = 2 \int (p' - \bar{p})^2 |T(p')|^2 dp'. \quad (7)$$

بواسطة المعادلة A (169)، احتمالية السعات تكون مرتبطة بالمعادلات

$$\left. \begin{aligned} T(p') &= \int S(q') R(q'p') dq', \\ S(q') &= \int T(p') R^*(q'p') dp'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

حيث $R(q'p')$ تكون مصفوفة التحويل من فراغ هيلبرت فيه q هي المصفوفة القطرية إلى فراغ فيه p هو القطر، من معادلة A (41) نحصل على

$$\int p(q'q'') R(q''p') dq'' = \int R(q'p'') p(p''p') dp'',$$

وبواسطة المعادلة A (42) تكون هذه مكافئة للمعادلة

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'} R(q'p') = p' R(q'p'), \quad (9)$$

وحلها يكون

$$R = c e^{(2\pi i/\hbar)p'q'}. \quad (10)$$

ومعايرتها تعطي c القيمة $1/\sqrt{\hbar}$ ومن ثم فإن قيم Δp ، Δq لا تكون مستقلة. لتبسيط الحسابات، نقدم هذه الاختصارات

$$\left. \begin{aligned} x &= q' - \bar{q}, & y &= p' - \bar{p}, \\ s(x) &= S(q')e^{(2\pi i/\hbar)\bar{p}q'}, \\ t(y) &= T(p')e^{-(2\pi i/\hbar)\bar{q}(p' - \bar{p})}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

عندئذ تصبح معادلات (5) و(7)

$$(\Delta q)^2 = 2 \int x^2 |s(x)|^2 dx, \quad (5a)$$

$$(\Delta p)^2 = 2 \int y^2 |t(y)|^2 dy, \quad (7a)$$

بينما تصبح معادلات (8)

$$\begin{aligned} t(y) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int s(x) e^{(2\pi i/\hbar)xy} dx, \\ s(x) &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int t(y) e^{(2\pi i/\hbar)xy} dy. \end{aligned} \quad (8a)$$

بدمج (5a)، و(7a)، و(8a) ربما يتحول تعبير $(\Delta p)^2$ ، ليعطي

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta p)^2 &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int y^2 t^*(y) dy \int s(x) e^{(2\pi i/\hbar)xy} dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int t^*(y) dy \int s(x) \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dx} \right)^2 e^{(2\pi i/\hbar)xy} dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \int t^*(y) dy \int \frac{d^2 s}{dx^2} e^{(2\pi i/\hbar)xy} dx, \\ &= \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \int s^*(x) \frac{d^2 s}{dx^2} dx, \end{aligned}$$

أو

$$\frac{1}{2}(\Delta p)^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \int \left| \frac{ds}{dx} \right|^2 dx. \quad (12)$$

والآن

$$\left| \frac{ds}{dx} \right|^2 \geq \frac{1}{(\Delta q)^2} |s(x)|^2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(\Delta q)^2} |s(x)|^2 \right) - \frac{x^2}{(\Delta q)^4} |s(x)|^2, \quad (13)$$

كما يمكن أن تبث لإعادة ترتيب العلاقة الواضحة

$$\left| \frac{x}{(\Delta q)^2} s(x) + \frac{ds}{dx} \right|^2 \geq 0. \quad (13a)$$

عندئذ يستنتج من المعادلة (12) أن

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta p)^2 &\geq \frac{1}{2} \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta q)^2}, \\ \Delta p \Delta q &\geq \frac{h}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \text{أو} \quad (14)$$

والذي كان يجب إثباته. التساوي كان يجب أن يكون صحيحًا في (14) فقط إذا أصبح الطرف الأسير للمعادلة (13a) صفرًا، أي عندما

$$\left. \begin{aligned} s(x) &= ce^{-x^2/2(\Delta q)^2}, \\ S(q') &= ce^{-(q'-\bar{q})^2/2(\Delta q)^2 - (2\pi i/h)\bar{p}q'}, \end{aligned} \right\} \text{أو} \quad (15)$$

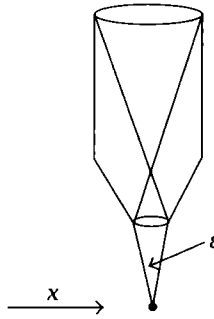
حيث c ثابت اختياري، إذن يجعل قانون جاوس للتوزيع الاحتمالي حاصل الضرب $\Delta p \Delta q$ يصل إلى قيمته الصغرى.

يجب التركيز مرة أخرى على أن هذا البرهان لا يختلف إطلاقاً من حيث محتواه الرياضي عن ذلك الذي أعطى في بداية هذا الجزء على أساس الازدواجية بين صور الموجة والجسيم للظواهر الذرية، البرهان الأول، إذا ما تم بدقة، فسيشمل أيضاً كل المعادلات (4)–(14).

فيزيائياً، البرهان الأخير يظهر أكثر عمومية من الأول الذي أثبت على فرض أن x كانت إحداثي كارتيزي ويطبق فقط خاصة على الإلكترونات الحرة بسبب العلاقة $\lambda = h/\mu v_g$ التي تدخل في البرهان. ومن جهة أخرى، فإن المعادلة (14)، تطبق على أي زوجين لشكلين متصاحبين q, p . هذا التعميم الأكبر للمعادلة (14)، لكنه خادع بالأحرى. وكما أكد بور^٢، إذا ما أمكن قياس إحداثيات الإلكترون، فلا بد عملياً أن يكون حرّاً.

٢- إيضاحات علاقات عدم اليقين

تشير قاعدة عدم اليقين إلى درجة عدم التعيين في المعرفة المتاحة حالياً للقيم المتزامنة للكميات العديدة التي تعالج بها نظرية الكم؛ إنها لا تنحصر، على سبيل المثال، في دقة تعيين المكان وحده أو في قياس السرعة وحدها. لذا افترض أن سرعة إلكترون حر تكون معروفة بدقة، بينما المكان غير معروف مطلقاً. عندئذ تنص القاعدة على أن كل ملاحظة تالية للمكان ستغير العزم بكمية غير معروفة وغير معينة بحيث إنه بعد إجراء التجربة فإن معرفتنا بالحركة الإلكترونية تكون مقيدة بعلاقة عدم اليقين. هذا يمكن أن يعبر عنه بطريقة مختصرة وعمامة بأن نقول إن كل تجربة ستحطم المعلومة التي حصل عليها بالتجارب السابقة. هذه الصياغة توضح أن علاقة عدم اليقين لا تشير إلى الماضي؛ إذا كانت سرعة الإلكترون معلومة أولاً ثم يعين المكان بالضبط، فيمكن حساب المكان للأزمنة السابقة للقياس. لذلك ولهذه الأزمنة فإن $\Delta p \Delta q$ تكون أصغر من القيمة الحدية المعتادة، لكن معلومة الماضي هذه تكون ذات صفة كلامية، حيث إنها إطلاقاً تستخدم كفرض مبدئي في أي حسابات مستقبلية للإلكترون، لذلك لا يمكن أن تخضع للتحقيق العملي (بسبب التغيير عند المعلوم في العزم بواسطة قياس المكان). إنها مسألة



شكل ٥

اعتقاد شخصي إذا ما كان الحساب هذا المعنى بالتاريخ السابق للإلكترون يمكن أن يرجع أي واقع فيزيائي أم لا.

(أ) تعيين مكان جسيم حر

كأول مثال لهدم معرفة عزم الجسيم بواسطة الجهاز المستخدم لتعيين مكانها، نعتبر استخدام ميكروسكوب. افرض أن جسيماً يتحرك على بعد مسافة من ميكروسكوب؛ تنشئت أشعته المخروطية من خلال فتحة زاوية ϵ . إذا كانت λ هي الطول الموجي للضوء الساقط عليها، فإن عدم اليقين في قياس الإحداثي x (انظر شكل ٥) طبقاً لقوانين البصريات التي تحكم قوة تفريق أي جهاز تكون

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \epsilon}. \quad (16)$$

لكن لأي قياس يمكن حدوثه فإن فوتوناً واحداً على الأقل يجب أن يتشتت من الإلكترون ويمر خلال الميكروسكوب إلى عين الملاحظ. من هذا الفوتون سيستقبل الإلكترون ارتداد كومبتون بمقدار h/λ . ولا يكون هذا الارتداد معلوماً بالضبط، حيث إن اتجاه تشتت الفوتون لا

يعين داخل حزمة الأشعة الداخلة إلى الميكروسكوب. لذلك يوجد عدم يقين الارتداد في اتجاه x مقداره

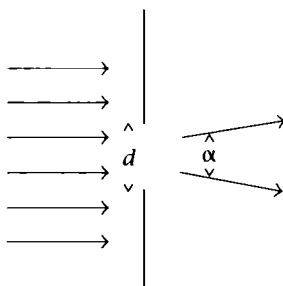
$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon, \quad (17)$$

ويتبع أنه للحركة بعد التجربة

$$\Delta p_x \Delta x \sim h. \quad (18)$$

وربما يظهر الاعتراض على الآتي؛ أن غير المعنيات للارتداد هي بسبب عدم اليقين لمسار كم الضوء داخل حزمة الأشعة، وربما نبحت لتعيين المسار بجعل الميكروسكوب متحركًا ونقيس الارتداد المستقبل من كم الضوء، لكن هذا لا يتغلب على علاقة عدم اليقين، لأنه سيظهر مباشرة السؤال عن مكان الميكروسكوب، والمكان والعزم سيكونان خاضعين للمعادلة (18). إن مكان الميكروسكوب لا يحتاج أخذه في الاعتبار، إذا كان الإلكترون ومقياس ثابت سيلاحظان في آن واحد خلال الميكروسكوب المتحرك، وهذا سيتحمل هروبيًا من قاعدة عدم اليقين. لكن المشاهدة عندئذ تحتاج أنية مسار كمّين من الضوء على الأقل خلال الميكروسكوب إلى المشاهد — واحد من الإلكترون، وواحد من المقياس — ومقياس الارتداد إلى الميكروسكوب لن يكون كافيًا لتعيين اتجاه الضوء المشتت بواسطة الإلكترون، وهكذا إلى ما لا نهاية.

ربما يحاول المرء تحسين الدقة بقياس أقصى نمط حيود أنتج بواسطة ميكروسكوب. هذا فقط سيكون ممكنًا عندما تتعاون فوتونات كثيرة، وتبين الحسابات أن الخطأ في قياس x سيقبل إلى $\Delta x = \lambda / \sqrt{m} \sin \epsilon$ عندما تنتج m من الفوتونات النمط. ومن جهة أخرى سيساهم كل إلكترون في التغيير غير المعروف في عزم الإلكترون، والنتيجة تكون $\Delta p_x = \sqrt{m} h \sin \epsilon / \lambda$ (إضافة الأخطاء المستقلة). لذا فالعلاقة (18) لا يمكن تجنبها.



شكل ٦

ما يميز المناقشة السابقة هو الاستخدام الآني للاستنتاج من نظريات الجسيم والموجة، لأنه من جهة، نحن نتحدث عن قوة التفريق، ومن جهة أخرى، عن الفوتونات والارتداد الناتج عن اصطدامها مع الجسيم موضع الاعتبار، هذا يكون متجنبًا، مادامت نظرية الضوء اعتبرت في الآتي.

إذا ما سمح بمرور الإلكترونات خلال فتحة ذات عرض d (شكل ٦) فسيكون إحداثياتها في اتجاه العرض (d) معروفة عند اللحظة بعد مرورها من الفتحة وبدقة $\Delta x = d$. إذا افترضنا أن العزم في هذا الاتجاه العمودي على الفتحة مقداره صفر قبل المرور من الفتحة، يكون من الظاهر أن علاقة عدم اليقين لن تتحقق. لكن الإلكترون يمكن اعتباره موجة دي بروي في المستوى، ومن ثم تتكون ظاهرة الحيود بواسطة الفتحة، والشعاع الناتج له زاوية تباعد α محددة، تعطي بأبسط قوانين البصريات

$$\sin \alpha \sim \frac{\lambda}{d}, \quad (19)$$

حيث λ هي طول موجة دي بروي. وعلى ذلك يعطي عدم اليقين في عزم الإلكترون الموازي للشاشة بعد مروره من خلال الفتحة، بمقدار

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha \quad (20)$$

حيث h/λ هي عزم الإلكترون في اتجاه الشعاع وعليه، حيث $\Delta x = d$ ،

$$\Delta x \Delta p \sim h.$$

في هذه المناقشة تجنبنا الصفة المزدوجة للضوء، لكننا استخدمنا النظريتين للإلكترون. وكآخر طريقة لتعيين المكان، نناقش طريقة مشاهدة التحلل الناتج بأشعة α عند استقبالها على شاشة فلورسينية أو مشاهدة مساراتها (مضاميرها) في حجرة ويلسن Wilson.

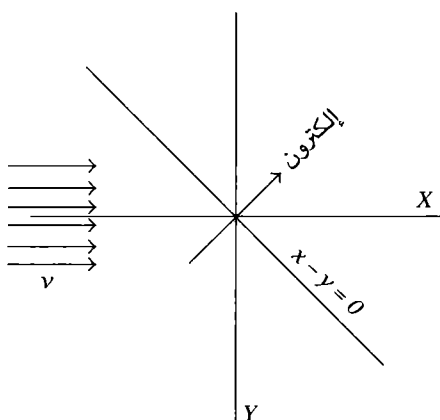
والنقطة الأساسية في هذه الطرق هي أن مكان الجسيم يستدل عليه بتأين ذرة ما، ويكون واضحاً أن الحد الأدنى للدقة لهذا القياس يعطي بالبعد الخطي Δq_s للذرة، وأيضاً عزم الجسيم المرتطم سيتغير أثناء التأين. وحيث إن عزم الإلكترون الخارج من الذرة يكون قابلاً للقياس، فعدم اليقين في التغير في العزم للجسيم المرتطم يكون مساوياً للمدى Δp_s ، وفي داخله سيتغير عزم هذا الإلكترون بينما يتحرك في مداره غير المتأين. هذا التغير في العزم سيكون مرة أخرى مرتبطاً بحجم الذرة بالمتباينة

$$\Delta p_s \Delta q_s \geq h.$$

وستظهر مناقشة لاحقة، في الحقيقة، أن عامة°

$$\Delta p_s \Delta q_s \sim nh,$$

حيث n هو عدد الكم للحالة الساكنة المعنية (انظر فقرة ٢ ج بعده). وعليه فإن علاقة عدم اليقين ستحكم أيضاً هذا النوع من قياس المكان، ويظهر أن علاقة عدم اليقين نتجت من شروط بور التي تعين الحالة الساكنة، لكنه بطبيعة الحال فإن شروط الكم هي نفسها مظهر للازدواجية Duality.



شكل ٧

(ب) قياس سرعة أو عزم جسيم حر

أبسط الطرق وأكثرها أساسية لقياس السرعة تعتمد على تعيين المكان عند وقتين مختلفين.

إذا كان انقضاء الفترة الزمنية بين قياسات المكان كبيراً فيمكن قياس السرعة بأي دقة مطلوبة قبل وصول الجسيم إلى المكان الثاني، لكن السرعة بعد المكان الثاني لا يمكن تعيينها بدقة، وهي ذات أهمية فيزيائية. ومرة أخرى فإن التغيير في العزم بعد قياس الموضع الثاني يكون غير معين مؤيداً بذلك لعلاقة عدم اليقين.

ويمكن الاستعانة بأثر دوبلر (ظاهرة دوبلر) Doppler لتعيين سرعة جسيمات مشحونة. شكل ٧ يبين ترتيب التجربة في أساسياتها. يفترض أن تكون المركبة p_x لعزم الإلكترون معروفة بدقة مثالية بينما إحداثي x لهذه المركبة غير معلوم بالمرّة. ومن جهة أخرى فإن إحداثي y للإلكترون يفترض أنه قد عين بدقة، والمركبة p_y غير معلومة، والمشكلة هي في تعيين السرعة في اتجاه y وسيرى أن معرفة إحداثي y تتحطم بهذا القياس إلى المدى المطلوب بعلاقة عدم اليقين، يفترض أن الضوء يسقط على طول الإحداثي x والضوء المشتت يشاهد في اتجاه y .

(يجب ملاحظة أن أثر دوبلر سيختفي تحت هذه الظروف، إذا كان الإلكترون سيتحرك على طول الخط المستقيم $(x - y = 0)$ وتكون ظاهرة دوبلر في هذه الحالة متطابقة مع ظاهرة كمبتون Compton ويكون ضرورياً فقط استخدام قوانين حفظ الطاقة والعزم للإلكترون وكوانتم الضوء.

افترض أن E هي طاقة الإلكترون، ν هي تذبذب الضوء الساقط، واستخدام «البريمز» لتمييز نفس الكمية قبل وبعد التصادم، ولدينا

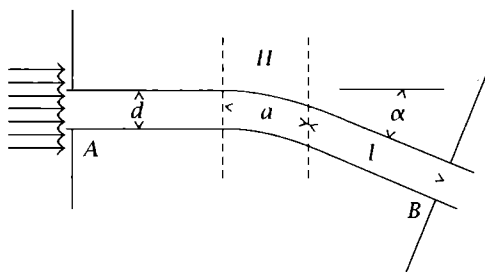
$$\left. \begin{aligned} h\nu + E &= h\nu' + E', \\ \frac{h\nu'}{c} + p_x &= p'_x, \\ p_y &= \frac{h\nu'}{c} + p'_y, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

من حيث

$$\left. \begin{aligned} h(\nu - \nu') &= E' - E, \\ &= \frac{1}{2\mu} [p_x'^2 + p_y'^2 - p_x^2 - p_y^2], \\ &\sim \frac{1}{\mu} [(p_x' - p_x)p_x + (p_y' - p_y)p_y], \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{h\nu}{c} p_x - \frac{h\nu'}{c} p_y \right], \\ &\sim \frac{h\nu}{\mu c} (p_x - p_y). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

وبما أنه افترض أن p_x و ν تكون معروفة، فدقة تعيين p_y تكون مشروطة فقط بالدقة التي قيست بها تذبذبات ν' الضوء المشتت:

$$\Delta p'_y = \frac{\mu c}{\nu} \Delta \nu'. \quad (23)$$



شكل ٨

ولتعيين v' بهذه الدقة، يستلزم ملاحظة قطار من الموجات بطول محدود، التي تتطلب بدورها زمناً محدوداً:

$$T = \frac{1}{\Delta v'}$$

وبما أنه غير معروف كون الفوتون سيصطدم بالإلكترون عند بداية أو نهاية هذه الفتحة الزمنية، فإنه أيضاً غير معروف إذا ما كان الإلكترون يتحرك بسرعة $(1/\mu)p_y$ أو $(1/\mu)p'_y$ خلال هذا الوقت، وعدم اليقين في مكان الإلكترون الناتج من هذا السبب يكون لذلك:

$$\Delta y = \frac{1}{\mu} (p_y - p'_y) T = \frac{h\nu}{c\mu} T,$$

لذا

$$\Delta p_y \Delta y \sim h.$$

والطريقة الثالثة لقياس السرعة تعتمد على انحراف جسيمات مشحونة بمجال مغناطيسي. لهذا الغرض يعرف الشعاع بفتحة عرضها يرمز له d . هذا الشعاع يدخل إلى مجال مغناطيسي متجانس اتجاهه يكون عمودياً على مستوى شكل ٨.

طول المنطقة التي يقع فيها الشعاع في المجال هي a ، وبعد مغادرة هذه المنطقة، سيمر في منطقة طولها l لا يعمل عليها المجال ثم يمر من خلال فتحة لها أيضاً عرض d ، حيث يحدد موضعها زاوية الانحراف α . وسرعة الجسيمات في اتجاه الشعاع تتعين من المعادلة

$$\alpha = \frac{(a/v)He(v/c)}{\mu v} = \frac{aHe}{\mu v c}. \quad (24)$$

وأخطاء القياس تتربط بالمعادلة:

$$\Delta\alpha = \frac{aHe}{\mu c} \frac{\Delta v}{v^2}.$$

وربما يفترض أن مكان الجسيم في اتجاه الشعاع كان معروفاً عند البدء بدقة كبيرة. هذا يمكن تحقيقه، على سبيل المثال، بفتح الفتحة الأولى فقط لفترة قصيرة، ومرة أخرى يرى أن هذه المعلومة ستفقد خلال التجربة وبما يحقق العلاقة $\Delta p \Delta q \sim h$ بعد التجربة.

ولنبدأ بأن الدقة التي بها يمكن تعيين الزاوية α تكون بوضوح $d/(l+a)$ ، لكن حتى هذه الدقة يمكن استمرارها إذا كان تشتت دي بروي الطبيعي للشعاع أقل من هذه. وعليه

$$\Delta\alpha \geq \frac{d}{l+a}, \quad \Delta\alpha \geq \frac{\lambda}{d},$$

وعليه

$$(\Delta\alpha)^2 \geq \frac{\lambda}{l+a}.$$

وعدم اليقين في مكان الجسيم في الشعاع بعد التجربة يكون مساوياً لحاصل ضرب الزمن اللازم للمرور خلال المجال والوصول إلى الفتحة الثانية وعدم

اليقين في السرعة. وعليه

$$\Delta q \sim \frac{l+a}{v} \Delta v,$$

وعليه

$$\begin{aligned} \Delta q \Delta v &\sim \frac{l+a}{v} (\Delta v)^2, \\ &\sim \frac{l+a}{v} \left(\frac{\mu c v}{aHe} \right)^2 (\Delta \alpha)^2, \\ &\geq \frac{\lambda}{v} \left(\frac{\mu c v^2}{aHe} \right)^2. \end{aligned}$$

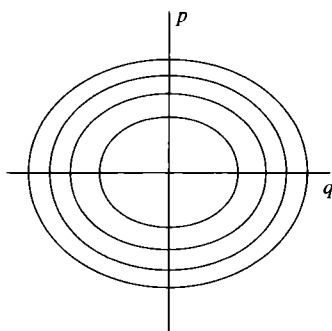
وبما بين الأقواس يكون مساوياً v/α و $\lambda = h/\mu v$ ، وعليه

$$\mu \Delta q \Delta v \geq \frac{h}{\alpha^2} \geq h,$$

حيث إن المعادلة (24) تكون صحيحة فقط عندما تكون α ذات قيمة صغيرة. وفي حالة زوايا انحراف كبيرة، يحتاج هذا الاستنتاج تعديلات ضرورية. يجب تذكر، ضمن أشياء أخرى، أن التجربة كما وصفت هنا لا تميز بين $\alpha = 2\pi$ و $\alpha = 0$.

(ج) الإلكترونات المربوطة (المقيدة)

إذا ما تطلب الأمر استنباط علاقات عدم اليقين للمكان q والعزم p للإلكترونات المقيدة، فيجب التمييز بوضوح بين قضيتين: تفترض الأولى أن طاقة النظام، أي حالته الساكنة، تكون معروفة ومن ثم يتقصى عن مدى الدقة في معرفة p و q المستتعبة في — أو متوافقة مع — طاقة النظام والثانية قضية محددة تهمل إمكانية تعيين طاقة النظام وتتقصى عن أكبر دقة تكون بها p و q معروفتين في آن واحد.



شكل ٩

وفي هذه الحالة الثانية، فإن التجارب اللازمة لقياس p و q قد تحدث انتقالات من حالة ساكنة إلى أخرى، بينما في الحالة الأولى، فإن طرق القياس تُختار بحيث لا تحدث انتقالات.

وسنعني في الحالة الأولى ببعض التفاصيل، بافتراض ذرة ما في حالة ساكنة. وطبقاً لما بينه بور^١، فإن نظرية الجسيم تجبر اعتبار أن $\Delta p \Delta q$ تكون عامة أكبر من h . لأنه من الواضح أننا معنيون بتغيير p و q عند حركة الإلكترون في مداره، وينتج من:

$$\int p dq = nh \quad (25)$$

أن

$$\Delta q_s \Delta p_s \sim nh. \quad (26)$$

وهذا يمكن فهمه من رسم الأوربيت orbit في فراغ طوري كما أعطي بالميكانيكا الكلاسيكية (شكل ٩).

والتكامل ما هو إلا المساحة المصورة بالأوربيت، و $\Delta p_s \Delta q_s$ تكون بوضوح لها نفس مدى القيمة. والمميز s ، المصاحب لعدم اليقين هذا وضع ليدل على أنهما ليسا القيمة الصغرى المطلقة لهذه الكميات، بل هي قيم

خاصة افترضت في حالة المعرفة الدقيقة للحالة الساكنة للذرة. وعدم اليقين يكون ذا أهمية عملية، على سبيل المثال، في مناقشة طريقة العد الإشعاعي لجسيمات α (الفصل الثاني فقرة 12).

في النظرية الكلاسيكية، يكون غريبًا اعتبار هذا كعدم دقة أساسية، لأن تجارب إضافية يمكن عملها بدون إحداث اضطراب في الأوربتال. نظرية الكم، على أي حال، توضح أن معرفة الطاقة تكون «حالة يمكن تعيينها»، أي حالة تكون ممثلة في المخطط الرياضي بواسطة حزمة موجية محدودة (في فراغ شكلي) ولا تشمل أي ثوابت غير معينة. هذه الحزمة الموجية هي دالة شرودنجر للحالة الساكنة.

لو أجريت الحسابات السابقة (من معادلات (4)–(15)) لهذه الحزمة، فإن قيمة $\Delta p_s \Delta q_s$ توجد أكبر من عدد النود (منطقة قيمة الدالة فيها معدومة) في دالة معينة. إذا اعتبرنا دالة s في المعادلة (12) التي تحوي عدد n نود، ستبين الحسابات أن

$$\Delta p_s \Delta q_s \sim nh.$$

ونذهب إلى القضية الثانية: يكون واضحًا أن أقصى دقة تعطى بالعلاقة $\Delta p \Delta q \sim h$ في حالة إهمال كل المعلومات للحالات الساكنة. عندئذ يمكن إجراء كل القياسات بعوامل جذرية حيث يعتبر الإلكترون حرًا (تعمل عليه قوى يمكن إهمالها). ويمكن بسهولة قياس عزم الإلكترون بإهمال التفاعل المفاجئ بين الإلكترون والنواة والإلكترونات المجاورة. عند ذلك سيتحرك الإلكترون في خط مستقيم ويمكن قياس عزم الإلكترون بطريقة مفسرة. والاضطراب اللازم لهذا القياس يكون له نفس مدى القيمة كطاقة ربط الإلكترون.

العلاقة [معادلة (6)] ذات أهمية، كما أوضح بور، للتكافؤ بين الميكانيكا الكلاسيكية وميكانيكا الكم في مدى كبير من عدد الكم n ، ويظهر ذلك عند فرص صلاحيته أوربيتال.

بما أن أعلى يقين يمكن الحصول عليه هو $\Delta p \Delta q \sim h$ فيجب أن يكون الأوربيتال هو مسار احتمالية الحزمة ذات مقطع (شريحة) $(|S(p')|^2 |S(q')|^2)$ يساوي تقريباً h ، هذه الحزمة يمكن أن تصف مساراً معرفاً جيداً ومغلقاً تقريباً إذا كانت المساحة المحصورة بهذا المسار أكبر بكثير من شريحة حزمة الموجة، ويكون هذا ممكناً (طبقاً للمعادلة (26) في مدى كبير لعدد الكم n . وفي حالة n صغيرة، من ناحية أخرى، فمفهوم الأوربيتال يفقد معناه، في فراغ طوري وكذلك في فراغ شكلي، ولذلك تبين الضرورة للتكافؤ المحدد للنظريتين وجود المعامل n في الجانب الأيمن من المعادلة (26).

عدم صلاحية مفهوم أوربيتال ما في مدى أعداد كم صغيرة يمكن توضيحه من الاعتبارات الفيزيائية المباشرة بالطرق الآتية:

الأوربيتال هو تتابع زمني لنقاط في الفراغ يشاهد الإلكترون فيها. وبما أن أبعاد الذرة في أقل حالاتها (من حيث الطاقة) تكون في حدود 10^{-10} سم، فيكون مستلزماً استخدام ضوء بطول موجة ليست بأكبر من 10^{-10} سم لإجراء قياس بدقة كافية للغرض، ويكون فوتون واحد كافياً لإزالة الإلكترون من الذرة، بسبب ارتداد كومبتون. لذلك تشاهد نقطة وحيدة من ذلك الأوربيتال المفترض. ويمكن على أي حال إعادة هذه المشاهدة الوحيدة لذرات عديدة، ومن ثم نحصل على توزيع محتمل للإلكترون في الذرة. وطبقاً لبورن Born، يعطي هذا التوزيع رياضياً في صورة $\psi \psi^*$ (أو في حالة عديد من الإلكترونات، يعطي بمتوسط هذا التعبير الإحداثيات الإلكترونية الأخرى في الذرة. وهذا هو المعنى الفيزيائي للعبارة أن $\psi \psi^*$ هي احتمال مشاهدة الإلكترون عند نقطة ما، هذه النتيجة غريبة عما تبدو من النظرة الأولى. فكما هو معروف بأن ψ تتلاشى رأسياً بزيادة المسافة من النواة، إلا أنه يوجد دائماً احتمالية ضئيلة لكن محدودة أن يوجد الإلكترون على بعد أكبر من مركز الذرة. عند هذه النقطة تكون طاقة جهد الإلكترون سالبة، لكنها صغيرة جداً. طاقة الحركة دائماً موجبة، لدرجة أن الطاقة الكلية تكون بالتأكيد أكبر من طاقة الحالة الساكنة المعنية.

هذا التناقض (البارادوكسي) يحل عندما يؤخذ في الاعتبار الطاقة المصدرة للإلكترون من الفوتون photon المستخدم في قياس المكان. وهذه الطاقة أكبر بقدر ملموس من طاقة التأين للإلكترون وهي لذلك كافية لمنع حدوث خرق لقانون حفظ الطاقة، وكما تحسب صراحة من نظرية أثر كمبتون.

هذا التناقض يخدم أيضاً في التحذير ضد إجراء «تفسير إحصائي» لميكانيكا الكم بنمطية كبيرة، بسبب السلوك الأسي لدالة شرودنجر عند مالانهاية، فيمكن إيجاد الإلكترون عند مسافة كبيرة، قل، ١ سم من النواة. ويمكن للمرء أن يفترض أنه من الممكن تحقيق وجود الإلكترون عند هذه النقطة باستخدام الضوء الأحمر. هذا الضوء الأحمر لا يمكن أن يحدث ارتداد كمبتون ويظهر مرة أخرى التناقض المذكور سابقاً. وكحقيقة، فإن الضوء الأحمر لن يسمح بإجراء هذا القياس، فالذرة كلها ستفاعل مع الضوء طبقاً لصيغ نظرية تحليل (تفريق) الضوء، والنتيجة هي عدم الحصول على أي معلومة تخص مكان إلكترون ما في الذرة. وربما يكون معقولاً أن تذكر (طبقاً لنظرية الجسيم) أن الإلكترون سينفذ عدداً من الدورات حول النواة خلال فترة واحدة للضوء الأحمر. لذا فالتوقعات الإحصائية لنظرية الكم تكون فقط ذات معنى إذا ما اقترنت بالتجارب التي تكون قادرة فعلاً على رصد الظاهرة المعالجة إحصائياً.

ومفهوم الأوربيتال يكون له معنى عند تطبيقه على حالات مثارة عليا للذرة؛ وعليه يجب أن يكون ممكناً إجراء تعيين مكان الإلكترون بعدم يقين أقل من أبعاد الذرة.

ولا يتبع الآن أن الإلكترون سيخرج من الذرة بارتداد كمبتون، وكما سيرى من المعادلات الآتية. أنه من الضروري أن الطول الموجي للضوء، λ ، أقل بكثير من Δq_s أو بالمعادلة

$$\frac{h}{\lambda} \gg \frac{\Delta p_s}{n}.$$

والطاقة الممنوحة للإلكترون من ارتداده هي تقريباً

$$\frac{h \Delta p_s}{\lambda \mu} \gg \frac{(\Delta p_s)^2}{n\mu} \sim \frac{|E|}{n} \quad (26a)$$

E هي طاقة الذرة، μ كتلة الإلكترون، ولقيم n الكبيرة تكون طاقة الارتداد هذه أقل بكثير من $|E|$ ، طاقة تأين الإلكترون، وعلى جانب في الطاقة بين المجالات الساكنة المجاورة في هذه المنطقة للطيف، والتي تكون أيضاً، في العموم، في حدود $|E|/n$ وكحقيقة، يستنتج من المعادلة (26a) أن:

$$hv \gg \frac{|E|}{n}.$$

بحيث إن تردد الضوء المستخدم في القياسات يكون كبيراً بالمقارنة بتردد الإلكترون في أوريبتاله.

ويترتب على أثر كمبتون أن يتسبب للإلكترون أن يقفز من حالة، قل $n = 1000$ إلى حالة أخرى تكون لها n ، قل أكبر من 950 وأقل من 1050. والأوربتال المعني الذي سيقفز إليه الإلكترون سيظل غير معين بسبب الاعتبارات المعطاة في الفصل الثاني فقرة ١ب. ونتيجة قياس المكان تكون على ذلك ممثلة في مخطط رياضي بواسطة حزمة احتمالية في الفراغ الشكلي، بنيت من دوال مميزة للحالات بين $n = 950$ و 1050 . ويعين حجمها بدقة قياس المكان. وتصف هذه الحزمة أوريبتالاً مناظراً للجسيم في الميكانيكا الكلاسيكية، المكان في المستقبل يمكن التنبؤ بها إحصائياً.

ويتغير بشكل مستمر التمثيل الرياضي للعملية الفيزيائية وذلك مع كل قياس جديد، هذه الملاحظة التي تفرد عدداً كبيراً من الإمكانيات واحدة منها هي الواحدة التي حدثت. والحزمة الموجية التي انتشرت ستستبدل بواحدة أصغر والتي تمثل نتيجة هذه الملاحظة. وكما علمنا أن النظام سيتغير بشكل غير مستمر عند كل ملاحظة فإن تمثيلها الرياضي يجب أيضاً أن يتغير بشكل غير مستمر وهذا ما نجده في نظريات الإحصاء الكلاسيكية كما في النظرية الحالية.

وقد درس عدد من المؤلفين حركة وانتشار الحزم المحتملة، لذا فلا يتطلب الأمر هنا مناقشة رياضية وعلى أي حال،^٧ سنذكر بعض اعتبارات إهينر فيست Ehrenfest.^٨ افترض حركة إلكترون في مجال قوى ذي جهد $V(q)$. والدالة الموجية تحقق [المعادلة (80) فيما بعد].

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi + eV\psi = -\frac{\hbar}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (27)$$

وقيمة q المحتملة تعطى بالمعادلة (4) باعتبار $\psi = S$ ؛ q هو واحد من الإحداثيات المستطيلة (الديكارتيّة) x, y, z . ثم فاضل بالنسبة إلى t :

$$\mu\dot{q} = \mu \int q \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* + \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right) d\tau;$$

وبالتعويض بقيم $\partial\psi/\partial t$ و $\partial\psi^*/\partial t$ من المعادلة (27):

$$\mu\dot{q} = \frac{\hbar}{4\pi} \int q \left(-\psi^* \nabla^2\psi + \psi \nabla^2\psi^* \right) d\tau;$$

وكامل بالتجزئ

$$\mu\dot{q} = \frac{\hbar}{4\pi} \int \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial q} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial q} \right) d\tau.$$

ويمكن إعادة هذه العملية للمرة الثانية للحصول على $\mu\ddot{q}$ ، وحيث إن الحسابات طويلة لكنها سهلة، فتعطي فقط النتيجة:

$$\mu\ddot{q} = -e \int \frac{\partial V}{\partial q} \psi\psi^* d\tau. \quad (28)$$

إذا مثلت ψ حزمة موجية ذات أبعاد فراغية صغيرة بالمقارنة بالمسافة التي تتغير فيها $\partial V/\partial q$ بشكل ملموس، فيمكن كتابة

$$\mu\ddot{q} = -e \frac{\partial V(\bar{q})}{\partial \bar{q}}. \quad (29)$$

وهذا يثبت، مادامت حزمة الموجة ظلت صغيرة، فإن مركزها سيتحرك طبقاً للمعادلة الكلاسيكية لحركة الإلكترون.

وعند هذه النقطة تجدر الإشارة إلى ملحوظة تختص بانتشار حزمة الموجة. إذا كانت الحركة الكلاسيكية للنظام دورية، فربما يحدث أن حجم حزمة الموجة يمر أولاً بتغيرات دورية.

ويمكن حساب نوعي لعدد اللغات التي تحدثها الحزمة قبل أن تنتشر بالكامل فوق منطقة الذرة، كما يلي:

إذا لم يكن هناك انتشار على الإطلاق، فيمكن إجراء تحليل فورير للكثافة المحتملة التي فيها مضاعفات صحيحة لتذبذب الأوربيت الأساسي، وكحقيقة، على أي حال فإن الأوفرتون لنظرية الكم لا تكون بالضبط مضاعفات صحيحة لهذا التذبذب الأساسي. والوقت الذي فيه يزاح بالكامل طور الأوفرتون النظري الكمي من تلك الأوفرتون الكلاسيكي سيكون نوعياً هو نفسه كالوقت المطلوب لانتشار حزمة الموجة. افرض أن J هو متغير الفعل للنظرية الكلاسيكية، وعليه يكون هذا الوقت

$$t \sim \frac{1}{h(\partial v / \partial J)}$$

وعدد اللغات التي تتم في هذا الوقت تكون:

$$N \sim \frac{v}{h(\partial v / \partial J)}. \quad (30)$$

وفي الحالة الخاصة للمتذبذب الهارموني، تصبح N غير محدودة — وتبقى حزمة الموجة صغيرة لكل الوقت. وعمامة، على أي حال، ستكون N في مدى قيمة عدد الكم n .

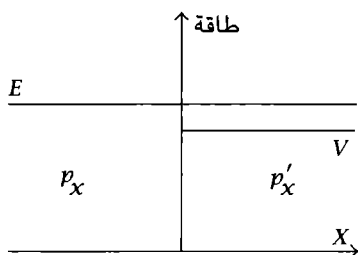
ومرتبطاً بهذه الموضوعات، يمكن الأخذ في الاعتبار تجربة مثالية أخرى (ترجع إلى أينشتين). نتخيل فوتوناً يمثل بحزمة موجة بنيت من موجات ماكسويل* وهي لذلك ذات امتداد فراغي وأيضاً ذات مدى معين من

* الفوتون واحد، فالفراغ الشكل ذو أبعاد ثلاثة؛ ويمكن اعتبار معادلة شرودنجر منطبقة مع معادلات ماكسويل.

التذبذب. وبالانعكاس على سطح مرآة شبه شفافة، يمكن تقسيم حزمة الموجة إلى قسمين، المنعكس والنافذ. وتوجد احتمالية أكيدة لوجود الفوتون في قسم أو في القسم الآخر من حزمة الموجة المقسمة. وبعد وقت كافٍ سينفصل الجزيئان بأي مسافة مطلوبة؛ وإذا كانت تجربة ستولد نتيجة أن الفوتون سيكون في الجزء المنعكس فإن احتمال وجوده في الجزء الآخر من الحزمة سيكون معدوماً. لذلك فالتجربة عند مكان الموجة المنعكسة ستحدث نوعين من الفعل (تقليل حزمة الموجة) عند مسافة تحتلها الحزمة المارة (النافذة)، ويرى المرء أن هذا الفعل سينتقل بسرعة أكبر من سرعة الضوء. على أي حال، يكون واضحاً أن هذا النوع من الفعل لا يمكن إطلاقاً استخدامه لنفاذ أو نقل الإشارات حتى لا تكون متناقضة مع افتراضات نظرية النسبية.

(د) قياسات الطاقة

قياس طاقة الإلكترون الحر مطابقة لقياس سرعته، وغالبية الطرق الممكنة عولجت على هذا الأساس. وطريقة لم تناقش بعد لقياس طاقة الإلكترون هي التي فيها تسببت في الحركة ضد مجال مبطيء. إذا مر الإلكترون خلال المجال فإنه يكون عادة افتراض نتيجة النظرية الكلاسيكية، حيث طاقة E تكون بالتأكيد أكبر من الطاقة V لأعلى طاقة وضع للمجال، وإذا ما انعكس، تكون طاقته أصغر من هذه القيمة الحرجة. هذا الاستنتاج يكون بالتأكيد غير صحيح في نظرية الكم، وسنناقش هنا الطريقة باختصار. إذا كان عرض حاجز الجهد يقارن بطول موجة دي بروي λ للإلكترون، فسوف ينفذ من خلالها عدد من الإلكترونات حتى لو كانت طاقتها E أقل من القيمة الحرجة اللازمة من النظرية الكلاسيكية. ويقل هذا العدد أسياً كلما ازدادت سعة الحاجز وكذلك قيمة $V - E$. وبالمقابل عند $E > V$ سوف ينعكس عدد معين إذا كانت تغيرات الجهد ملموسة في مسافة λ . وفي أي تجربة عملية، فإن هذه الشروط لن تتحقق، ويمكن استخدام استنتاجات النظرية الكلاسيكية وبدون خطأ ملموس،



شكل ١٠

وتكون مهمة المعالجة الرياضية للوضع الذي صور، ومع ذلك سوف توضح في حالة عدم اتصالية مفاجئة في توزيع الجهد، وسوف تستخدم معادلة شرودنجر لإلكترون منفرد، وهذا ليس مطابقاً للنظرية الموجية للمادة، حيث إن الأخيرة يجب أن تأخذ في الحسبان تفاعل الموجة في حد ذاتها. وتوزيع الجهد يبين في شكل ١٠.

ونحصل على التعبير الآتي في حالة الموجة الساقطة ψ في المنطقة I

$$(x < 0)$$

$$\psi_i = ae^{(2\pi i/h)(px-Et)}, \quad \frac{1}{2\mu} p^2 = E, \quad p > 0; \quad (31a)$$

وللموجة النافذة إلى المنطقة II ($x > 0$)

$$\psi_t = a'e^{(2\pi i/h)(p'x-Et)}, \quad \frac{1}{2\mu} p'^2 = E - V; \quad (31b)$$

وللموجة المنعكسة في I

$$\psi_r = a''e^{(2\pi i/h)(-px-Et)}. \quad (31c)$$

وإذا كانت p' حقيقتة، تؤخذ أكبر من الصفر، ولو كانت تخيلية فإن الانعكاس الكامل سيوجد ويؤخذ على أنه تخيلي موجب، حيث ψ_t يجب

أن تبقى محدودة عند $(x \rightarrow \infty)$. وعند عدم الاتصال $(x = 0)$ ، يجب أن تكون ψ متصلة وتملك مشتقة أولى متصلة، وعليه

$$\left. \begin{aligned} \psi_i + \psi_r &= \psi_t \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_t}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{ when } x = 0;$$

أو

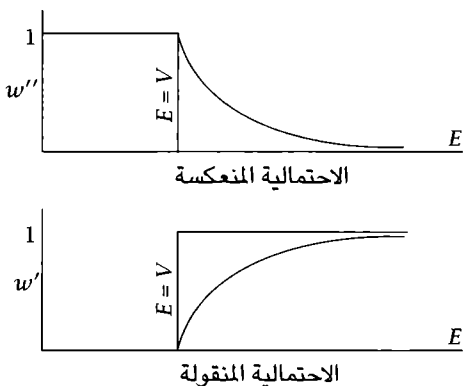
$$\begin{aligned} a + a'' &= a' \\ p(a - a'') &= a' p'. \end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلات لكل من a' و a'' :

$$\left. \begin{aligned} a'' &= a \frac{p - p'}{p + p'}, \\ a' &= a \frac{2p}{p + p'}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

عدد الإلكترونات التي تمر خلال شريحة ما في وحدة الزمن تعطى بمربع القيمة المطلقة للسعة مضروبة في العزم بشرط أن تكون حقيقية. لذا عند $E > V$ فإن شدة الموجات الساقطة، والمارة، والمنعكسة ستتناسب على الترتيب مع:

$$\left. \begin{aligned} I_i &= |a|^2 p; \\ I_t &= |a|^2 \left(\frac{2p}{p + p'} \right)^2; \\ I_r &= -|a|^2 \left(\frac{p - p'}{p + p'} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$



شكل ١١

ليقيم p' التحليلية، لا تمثل الموجة ψ_t تيارًا من الإلكترونات، لكن تمثل توزيع شحنة ساكنة، و $I_t = 0$. حيث $|a''| = |a|$ في هذه الحالة تكون $I_r = -I_i$ ، وفي كلتا الحالتين

$$I_i = -I_t - I_r.$$

والاحتمالات النسبية للانعكاس والنفادية للإلكترون تكون بالمعادلات (33) و(31)

$$\left. \begin{aligned} p'' &= \frac{I_r}{I_i} = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-V}} \right|^2, \\ p' &= \frac{I_t}{I_i} = \sqrt{\frac{E-V}{E}} \left| \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-V}} \right|^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

هذه التعبيرات قد رسمت كخطوط متصلة في شكل ١١، والمنحنيات المتوقعة من النظرية الكلاسيكية رسمت كخطوط متقطعة.

لتوضيح الأسس الفيزيائية لنظرية الكم يكون اعتبار قياس طاقة الذرات أكثر أهمية من تلك التي للإلكترونات الحرة، وهذه سوف تعطي بتفاصيل أكثر من السابقة. ولأن طور الحركة الإلكترونية يكون المتغير

المصاحب بشكل قانوني للطاقة، يستتبع من قاعدة عدم اليقين أن هذا يجب أن يكون غير معروف تمامًا إذا تحددت الطاقة على وجه الدقة. وحيث إن طور الحركة الإلكترونية يحدد طور الأشعة المنبعثة، ومن هذا الأخير ندخل المناقشة الفيزيائية، وسيرى أن أي تجربة تفصل الذرات الموجودة في الحالة الساكنة n عن الذرات في الحالة m ستهدم أي معلومة مسبقة لطور الأشعة المناظرة للإنتقاله $n = m$.

لتكن S الشعاع من الذرات (شكل ١٢) له العرض d في اتجاه x الذي أرسل خلال مجال غير متجانس F (ليس بالضرورة مجالاً مغناطيسياً، كما في تجربة شتيرن-جيرلاخ)، لكن يمكن أن يكون مجالاً كهربياً أو جاذبية. طاقة الذرة في الحالة m يرمز لها E_m ، وستعتمد على مقدار المجال F عند مركز ثقل الذرة، ليكون قوى الانحراف للمجال في اتجاه x ، $\partial(E_m(F))/\partial x = (dE_m/dF)(dF/dx)$ ، ويكون مختلفاً للذرات في الحالات المختلفة، إذا كان T الوقت اللازم للذرات للمرور خلال المجال، و p هي عزم الذرات في اتجاه المجال، فالانحراف الزاوي للذرات سيكون

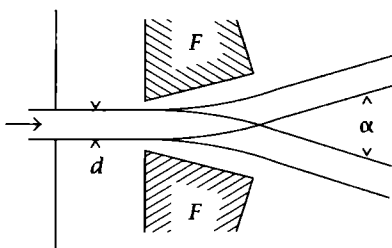
$$\frac{\partial E_m}{\partial x} \frac{T}{p}$$

لذلك فالشعاع الأصلي سينقسم إلى عدد، كل سيحتوي فقط على الذرات الموجودة في حالة واحدة، والفصل الزاوي α لشعاعين يحتويان على ذرات في الحالات n و m على الترتيب سيصبح

$$\alpha = \left(\frac{\partial E_m}{\partial x} - \frac{\partial E_n}{\partial x} \right) \frac{T}{p}$$

هذه الزاوية يجب أن تكون أكبر من التشتت الطبيعي للشعاع الذري إذا ما فصلت الذرات إلى نوعين، وعليه

$$\alpha \geq \frac{\lambda}{d} \quad \frac{h}{pd} \quad (35)$$



شكل ١٢

تحتوي دالة شرودنجر ψ_n على دالة دورية $e^{(2\pi i/h)E_n t}$. لأن E_n تكون دالة في F ، فإن التذبذب والطور للموجة سيتغيران بالمرور خلال المجال، وهذا التغير يكون غير محدد، إلى مدى معين، حيث إنه من المستحيل أن نعرف في أي جزء من الشعاع تتحرك الذرة والمجال F يختلف من نقطة إلى نقطة.

وعدم اليقين $\Delta\varphi$ لتغير الطور للأشعة ذات التذبذب $(E_m - E_n)/h$ أثناء الزمن T يكون

$$\Delta\varphi \sim 2\pi \left(\frac{\partial E_m}{\partial x} - \frac{\partial E_n}{\partial x} \right) \frac{Td}{h} = \frac{pd}{h} 2\pi\alpha.$$

من المعادلة (35) يستنتج في الحال أن:

$$\Delta\varphi \geq 1. \quad (36)$$

هذا يعني تمام عدم التحديد في الطور.

ويمكن إجراء الحسابات بمزيد من الواقعية إذا ما اقتصرنا على تطبيق المجالات المغناطيسية فقط، بإهمال الدوران المغزلي للإلكترون Spin، فمن المعروف أن الذرات تدور حول محورها مثل جسيم صلب تحت تأثير المجال المغناطيسي H ، وسرعة هذا الدوران تكون:

$$\omega = \frac{e}{2\mu c} H,$$

وينطبق محورها مع اتجاه المجال. هذه السرعة تكون مختلفة للعديد من الذرات بسبب عرض الشعاع وعدم تجانس المجال. هذا الاختلاف في الدورات للذرات المختلفة يميل إلى هدم أي علاقة طور ربما تكون موجودة في البداية. لعدم اليقين في ω ، نحصل بسهولة على

$$\Delta\omega = \frac{ed}{2\mu c} \frac{\partial H}{\partial x},$$

ويكون الفصل الزاوي للشعاعين هو:

$$\alpha = \frac{e}{2\mu c} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{hT}{2\pi p};$$

لأن α يجب أن تكون أكبر من h/pd .

$$T\Delta\omega \geq 2\pi.$$

وعليه فكل أثر للطور الأصلي قد هدم بالتجربة. بعض الذرات ستكون قد نفذت لفة واحدة أكثر من الأخرى، وكل الزوايا البينية تكون ممكنة. وهذا لا يمكن تتبعه إذا كان الجهاز غير قادر على تحليل الشعاعين، لأنه عندئذ ربما تكون α أقل من h/pd .

وقد بين بور¹ أن كل الاعتبارات السابقة قد حلت واحدة من التناقضات التي أدخلها فرض الحالات الساكنة.

نفترض أن شعاعًا من الذرات، كلها في الحالة العادية في البداية، أثير بضوء ذي تردد تذبذبي إلى الوميض الفلورسيني، فنحن مضطرون إلى فرض أنها انبعثت بشكل متوافق (متماسك — لها نفس الطور). هذا يعني أن كل ذرة ستشتت موجة كروية، طورها يكون محددًا بموجة ساقطة في مستوى عند الذرة. هذه الموجات الكروية البدائية ستكون مرتبطة إلى درجة أن تركزها ينتج عنه موجة منكسرة في مستوى. من مشاهدة هذه الموجة يكون من المستحيل تحديد حالة الكم للمشح — أو حتى صفاتها الذرية. لكن إذا ترك الشعاع منطقة الإنارة وتحلل بواسطة مجال غير متجانس،

فإن شعاع الذرات الوحيدة التي في الحالة المثارة سيضيء. هذا الشعاع سيحتوي على عدد قليل نسبياً من الذرات، على مسافات واسعة مقارنة بالطول المحتمل لقطار الموجات المنبعثة. ويكون إشعاعها عندئذ متطابقاً عملياً مع الإشعاع الصادر من منبع مستقل. وكان هذا الفعل للمجال المغناطيسي مفهوماً مادام اتبع الفرض بأن قوة تحليل الجهاز يمكن زيادتها بلا حدود بإنقاص عرض شعاع الذرات.

الفصل الثالث

نقد المفاهيم الفيزيائية للنظرية الموجية

في الفصل السابق فرضت أبسط مبادئ النظرية الموجية، والتي أسست جيداً بالتجربة، وبدون التساؤل عن صحتها. وقد أخذت كأساس لنقد صورة الجسيم، والذي تبين أن هذه الصورة تطبق في مدى معين. والنظرية الموجية، بالمثل، تطبق فقط بقيود معينة، سنجدها الآن. وكما في حالة الجسيمات، فإن قيود تمثيل موجة ما لن تؤخذ مبدئياً في الاعتبار، لأنه تاريخياً سنواجه محاولات لتطوير نظريات الموجة في الأبعاد الثلاثة التي يمكن تصورها (موجات ماكسويل ودي بروي). ولهذه النظريات سيستخدم المصطلح «النظريات الموجية الكلاسيكية»؛ وهي تنسب إلى نظرية الكم للموجات بنفس طريقة نسب الميكانيكا الكلاسيكية إلى ميكانيكا الكم. ويحوي ملحق الكتاب المنهج الرياضي للنظريات الكلاسيكية والكم للموجات. (ويجب تحذير القارئ من اللبس بين النظرية الكلاسيكية للموجة وبين نظرية شرودنجر للموجات في فراغ طوري). وبعد الخوض ومراجعة النقد في كل من مفهوم الموجة ومفهوم الجسيم اختفت كل التناقضات بينهما فقط شريطة التنبيه إلى حدود تطبيق الصورتين.

١- علاقات انعدام اليقين للموجات

سيقت مفاهيم: سعة الموجة، شدة المجال المغناطيسي والكهربائي، كثافة الطاقة ... إلخ؛ من خبرات الحياة اليومية، مثل مشاهدة موجات المياه أو اهتزازات

أجسام مرنة. وتكون هذه المفاهيم منطبقة أيضاً على الضوء بل وحتى، وكما نعلم الآن، على موجات المادة، لكنه حيث إننا نعلم أيضاً أن مفاهيم نظرية الجسيم تنطبق على الأشعة والمادة، فأيضاً صورة الموجة لها قيدها، التي ربما تكون اشتقت من تمثيل الجسيم. وسوف نعني الآن بها، وبحالة الأشعة أولاً. وقبل أن ننتقل إلى موضوع مضاد، فعلى أي حال يجب مناقشة المقصود بالمعرفة الدقيقة لسعة الموجة باختصار، على سبيل المثال، لشدة مجال كهربائي أو مجال مغناطيسي. هذه المعرفة الدقيقة للسعة عند كل نقطة في منطقة الفراغ (بالمعنى الرياضي الصارم) هي بوضوح تجريد لا يمكن أبداً تحقيقه. لأن كل قياس يمكن أن يولد قيمة متوسطة واحدة للسعة في منطقة صغيرة من الفضاء وخلال مدى زمني قصير جداً. وبالرغم من أنه من المحتمل مبدئياً تقليل هذه الفراغات والمدى الزمني بدون قيد وذلك بتحسين أجهزة القياس، فإنه يكون مستحسنًا في حالة مناقشة مفاهيم النظرية الموجية إدخال قيم محددة للفراغ والمدى الزمني المتضمن في القياس و فقط سيئول إلى النهاية صفر لهذا المدى عند انتهاء الحسابات. وهذه، في الحقيقة، هي بالضبط الخطوات المستعملة في معالجة النظرية الرياضية لمجالات الموجات (انظر ملحق A فقرة ٩). ومن الممكن أن التطوير المستقبلي لنظرية الكم سيبين أن النهاية صفر لهذا المدى هو تجريد بدون معنى فيزيائي؛ وفي الوقت الحالي على أي حال لا يوجد سبب ظاهر لفرض أي قيود.

ولتقدم الفكر سنفترض أن قياساتنا ستعطي دائماً قيماً متوسطة على منطقة فراغ صغيرة جداً ذات حجم $\delta v = (\delta l)^3$ والتي تعتمد على طريقة القياس. وحيث إنها تكون مسألة قياس شدة المجال، فإن الضوء ذي الطول الموجي λ أصغر بكثير من δl لن تكشف بالتجربة. ستعطي القياسات، قل، قيم E و H لشدة المجالات (قيمة متوسطة على δv) إذا كانت قيم E و H معروفة بالضبط فسيكون هناك تناقض لنظرية الجسيم، حيث إن الطاقة والعزم لحجم صغير δv تكون:

$$E = \delta v \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2), \quad G = \delta v \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (37)$$

وحدود الطرف الأيمن يمكن تصغيرها كما نرغب بأخذ δv صغيرة بما فيه الكفاية. هذا غير متوافق مع نظرية الجسيم، فطبقاً لها يكون محتوى الطاقة والعزم لحجم صغير قد صنع من مقادير محددة $h\nu$ و $h\nu/c$ ، على الترتيب، لأن أعلى ذبذبة يتعرف عليها $h\nu \leq (hc/\delta l)$ ولهذا يكون واضحاً أن حدود الطرف الأيمن للمعادلة (37) يجب أن تكون غير يقينية بمقادير هذه الكمات ($h\nu/c$ و $h\nu$) حتى لا يكون هناك تناقضات في نظرية الجسيم. وبناءً عليه، يجب أن تكون هناك علاقات عدم اليقين بين مركبات E و H التي تؤدي إلى عدم يقين في قيم E بقيمة في مدى $h/\delta l$ وفي G بمدى مقدار $h/\delta l$ عندما تحسب E و G بالمعادلة (37). افترض أن ΔE و ΔH تكون عدم اليقين في E و H عندئذ يكون عدم اليقين في E و G هو:

$$\Delta E = \frac{\delta v}{8\pi} \{ 2 |E \cdot \Delta E| + 2 |H \cdot \Delta H| + (\Delta E)^2 + (\Delta H)^2 \},$$

$$\Delta G_x = \frac{\delta v}{4\pi c} \{ |(E \times \Delta H)_x| + |(\Delta E \times H)_x| + |(\Delta E \times \Delta H)_x| \},$$

بتبادل دوري للاتجاهات γ و z .

وحيث إن أكثر قيم E و H احتمالية ربما تكون صفراً فالأجزاء على اليمين المحتوية على ΔH و ΔE يجب أن تكون وحدها كافية لتعطي عدم اليقين لكل من E و G . ونصل إلى ذلك عندما:

$$\Delta E_x \Delta H_y \geq \frac{hc}{\delta v \delta l} = \frac{hc}{(\delta l)^4}, \quad (38)$$

بتبادل حلقي للمركبات الأخرى، وتشير علاقات عدم اليقين هذه إلى معرفة أنية لكل من E_x و H_y في نفس عنصر الحجم، ولكل عنصر حجم مختلف يمكن معرفة E_x و H_y لأي درجة من الدقة.

ويمكن الاستنتاج المباشر للعلاقات (38) كما في حالة نظرية الجسيم وذلك من العلاقات التبادلية لكل من E و H (انظر الملحق A فقرتي 9 و 12)، إذا استعمل تقسيم الفراغ إلى خلايا محددة مقدارها δv ، فالتكامل بالنسبة إلى dv في لاجرانجيات A (97) تصبح المجموع لكل خلايا δv . والعزم

المصاحب للدالة $\psi_\alpha(r)$ في الخلية ذات الترتيب r تكون عندئذ [انظر A (104):

$$\delta v \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha(r)} = \delta v \Pi_\alpha(r), \quad (39)$$

وفي مكان A (111)،

$$\Pi_\alpha(r) \psi_\beta(s) - \psi_\beta(s) \Pi_\alpha(r) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{rs} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{\delta v}, \quad (40)$$

حيث δ_{rs} تكون الدالة δ المعتادة،

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{for } r = s, \\ 0 & \text{for } r \neq s. \end{cases}$$

عند نهاية δv تتول إلى الصفر تصبح A (111).

ومن (40) و A (134) تطبق في حالة المجالات الكهربائية والمغناطيسية

ينتج أن:

$$E_i(r) \Phi_\alpha(s) - \Phi_\alpha(s) E_i(r) = -2\hbar c i \delta_{rs} \delta_{\alpha i} \frac{1}{\delta v}. \quad (41)$$

ونتذكر أن عدم اليقين $\Delta\Phi_k$ يعطي عدم يقين في مدى قيمة $\Delta\Phi_k/\delta l$ لشدة المجالات الناتجة من Φ_k ، سيتبين أن (41) تقود مباشرة إلى علاقات عدم اليقين (38).

وربما تعالج موجات المادة بطريقة مماثلة تمامًا. ويجب أن يلاحظ، على أي حال، أنه لا توجد تجربة يمكنها قياس السعة مباشرة، حيث إنه في الحقيقة من المؤكد أن موجات دي بروي مركبة. وإذا استنتجت علاقات التغيير لسعات الموجة شكلياً من تلك الخاصة بالدوال ψ و ψ^* ، فتكون النتيجة مؤكّداً واحدة معقولة فيزيائياً في حالة إحصائياً بوز-أينشتين. وعلى أي حال، فاستخدام إحصائيات فيرمي-ديراك الصحيحة عملياً يعطي نتيجة لا معنى لها أن ψ و ψ^* لا يمكن أن تقاس بالضبط في آن واحد عند

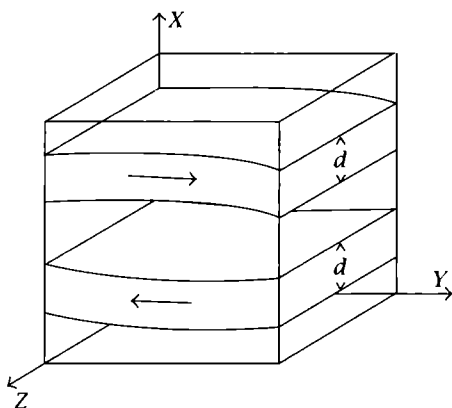
نقاط مختلفة في الفراغ. لذا يكون مرضياً أنه لا توجد تجربة تقيس ψ عند نقطة ما عند زمن معين. والسبب الرياضي لهذا هو أنه حتى لتفاعل الأشعة والمادة فإن جزء اللاجرانجيان المشير للمادة يحتوي مقاطع لها الشكل $\psi\psi^*$.

ومما أعطي أعلاه يمكن أيضاً رؤية أن إحصائيات بوز-أينشتين تكون ضرورة فيزيائية للضوء — كوانتم إذا افترض أن قياسات المجالات الكهربائية والمغناطيسية عند نقاط مختلفة في الفراغ يجب أن تكون مستقلة بعضها عن بعض.

٢- مناقشة قياس فعلي للمجال الكهرومغناطيسي

وكما في حالة صورة الجسم، يجب أن يكون ممكناً تتبع منبع عدم اليقين في قياس المجال الكهرومغناطيسي إلى مصدرها العملي. لذا سنناقش التجربة التي تكون قادرة في آن واحد على قياس E_x و H_z في نفس عنصر الحجم δv . يمكن تنفيذ ذلك لمشاهدة الانحراف في اتجاه x لشعاعين من أشعة الكاثود التي تعبر الحجم في الاتجاه المضاد على طول محور y . (انظر الشكل ١٣).

وربما يفترض أن عرض كلا الشعاعين في اتجاه z هو δl ، أي أن كل العرض لعنصر الحجم، لكن عرضها في الاتجاه العمودي يجب أن تكون أقل من d مثلاً حتى ربما تجتاز δv بدون اضطراب متبادل. وإذا كانت المسافة بين الشعاعين في حدود قيمة δl ، فإن عدم تجانسية المجال الصغيرة في هذا الاتجاه يمكن أخذ متوسطها، ويمكن أيضاً تغيير المسافة بينهما لهذا الغرض. هذا الترتيب العملي سيمكن قياس E_x و H_z في δl بشرط أن المجالات لا تكون غير كبيرة عدم التجانس (عدم تجانس ضئيل)، وإذا لم يتحقق هذا الشرط، تكون الطريقة غير قادرة على إعطاء نتيجة محددة، لأن المجال يجب ألا يتغير بشكل ملموس خلال عرض الأشعة وإلا فإنها تصبح منتشرة ولا توجد عندئذ طريقة بسيطة متاحة لتعيين الانحرافات.



شكل ١٣

الانحراف الزاوي α للأشعة في المسافة δl يكون مشاهدًا ويمكن حساب المجال من الصيغ:

$$\alpha_{\pm} = \frac{e}{p_y} \left(E_x \pm \frac{p_y}{\mu c} H_z \right) \frac{\mu \delta l}{p_y}.$$

وبسبب الانتشار الطبيعي لأشعة المادة، يعطي دقة القياسات بالمعادلات:

$$\Delta E_x \geq \frac{h p_y}{ed \mu \delta l}, \quad \Delta H_z \geq \frac{h p_y \mu c}{ed \mu \delta l p_y}. \quad (42)$$

يبقى عامل أساسي يؤخذ في الاعتبار، على أي حال. كل من الإلكترونات التي تمر خلال δv تعدل المجال آنياً، وعليه أيضاً مسار الإلكترون الآخر. وكمية هذا التعديل تكون غير مؤكدة بقدر ما، حيث إنه غير معروف عند أي نقطة في شعاع الكاثود يكون الإلكترون موجوداً. وعدم اليقين في المجالات الحقيقية التي نشأت من هذه الحقيقة هي إذن:

$$\Delta E_x \geq \frac{ed}{(\delta l)^3}, \quad \Delta H_z \geq \frac{ed p_y}{(\delta l)^3 \mu c}, \quad (43)$$

ولهذا

$$\Delta E_x \Delta H_z \geq \frac{hc}{(\delta l)^4},$$

التي يمكن إثباتها، ويجب ملاحظة أن الاعتبار الآتي لكل من صورة الجسيم والموجة للعملية الحادثة تكون مرة أخرى أساسية. إذا لم تذكر صورة الجسيم لأشعة الكاثود، وافترض توزيع مستمر للشحنة كصورة للأشعة، عندئذ فعدم اليقين (43) سيختفي.

الفصل الرابع

التفسير الإحصائي لنظرية الكم

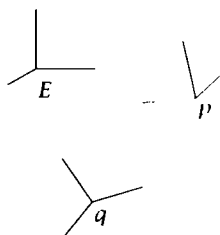
١- الاعتبارات الرياضية

سيكون بناءً مقارنة الجهاز الرياضي لنظرية الكم مع ذلك للنظرية النسبية. ففي كلا الحالتين يوجد تطبيق للجبر الخطي.

يمكن للفرد عندئذ مقارنة مصفوفات نظرية الكم مع التانسورات tensors المتماثلة للنظرية النسبية الخاصة. وأكبر اختلاف بينهما يكمن في حقيقة أن تانسورات نظرية الكم تكون في فراغ ذي أبعاد لا محدودة، وأن هذا الفراغ ليس حقيقياً بل تخيلياً.

والتحويلات التعامدية يحل محلها ما يسمى بتحويلات الوحدة. ولتكوين صورة لهذا الفراغ، نجرد من هذه الاختلافات صورة أساسية. فكل «كمية» كم نظرية تميز بتنسور يمكن رسم اتجاهه الأساس في هذا الفراغ. (انظر شكل ١٤). ولتكوين صورة واضحة، يمكن إعادة ذكر التانسور الخاص بعزوم القصور الذاتي لجسيم صلد. وتكون الاتجاهات الأساسية في العموم مختلفة لكل كمية، فقط.

المصفوفات التبادلية بعضها مع بعض لها اتجاهات أساسية متطابقة. والمعلومات الدقيقة للقيم العددية لأي متغير ديناميكي تناظر تعيين اتجاه محدد في هذا الفراغ، بنفس الطريقة مثل المعلومة الدقيقة لعزم القصور الذاتي لجسيم صلد التي تحدد الاتجاه الرئيسي المنتمي له هذا العزم (على فرض عدم وجود تحلل) هذا الاتجاه يكون موازياً للمحور الرئيسي ذي



شكل ١٤

الرتبة k للتنسور T وعلى طوله تقاس قيمة المركبة T_{kk} . والمعرفة الدقيقة للاتجاه (باستثناء معامل القيمة المطلقة واحد) في الفراغ الوحدوي هي أقصى معلومة تخص المتغير الديناميكي الكمي الذي يمكن الحصول عليه. وأطلق ويل Weyl تعبير حالة محددة reiner fall على هذه الدرجة من المعرفة. هذه الحالة المحددة تمثل بذرة في حالة ساكنة (غير متحللة non-degenerate)، الاتجاه المميز لها يكون ذلك المحور الأساسي ذا الرتبة k للتنسور E المنتمي لقيمة الطاقة E_{kk} . وبوضوح لا يوجد معنى يتسبب للمصطلح «قيمة الإحداثي q » إلخ، وفي هذا الاتجاه، مثل أن مواصفات عزم القصور الذاتي حول محور لا ينطبق مع واحد من الاتجاهات الرئيسية يكون غير كاف لتحديد أي نوع من حركة الجسم الجامد، مهما كانت بساطتها. فقط التنسورات التي تنطبق محاورها الأساسية مع تلك الخاصة بـ E يكون لها قيمة في هذا الاتجاه. والعزم الزاوي الكلي للذرة، على سبيل المثال، يمكن تحديده أنياً مع طاقته. فإذا أريد قياس قيمة q ، فإن المعرفة الدقيقة للاتجاه يجب أن تتبدل بمعلومات غير دقيقة، يمكن اعتبارها «خليطاً» من الاتجاهات الأصلية E_{kk} ، كل ذات معامل احتمالي معين.

وعلى سبيل المثال: الارتداد الإلكتروني غير المحدد يحول الحالة المحددة E_{kk} إلى خليط إذا ما قيس مكان الارتداد بميكروسكوب. هذا الخليط يجب أن يكون من ذلك النوع الذي ربما يعتبر أيضاً كخليط لاتجاهات q الرئيسية مع هذا بمعاملات احتمالية أخرى. ويفرز القياس قيمة معينة q' كنتيجة

فعلية. ويستنتج من هذه المناقشة أن قيمة q' لا يمكن التنبؤ بها وحدها من نتيجة تجربة تحديد E ، لأن اضطراب النظام، الذي يكون بالضرورة غير محدد لدرجة معينة، يجب أن يوجد بين التجريبتين المتضمنتين. ويحدد هذا الاضطراب نوعياً، فور معرفة أن نتيجة q هي قيمة دقيقة في هذه الحالة، فاحتمال وجود قيمة q' بعد أن قيست E تعطي بمربع جيب تمام الزاوية بين الاتجاه الأصلي E_k والاتجاه q' . وبدقة أكثر يجب القول بالتشابه لجيب التمام في الفراغ الوحدوي، الذي يكون $|S(E_k, q')|$. هذا الفرض هو واحد من فروض نظرية الكم ولا يمكن استنباطه من أي اعتبارات أخرى. ويتبع من هذه المسلمة أن قيم كميتين ديناميكيتين تكونان مترابطتين سببياً، إذا — وفقط إذا — كانت لتنسوراتهما محاور أساسية متوازية. وفي كل الأحوال الأخرى لا توجد علاقة سببية. والعلاقة الإحصائية بواسطة معاملات الاحتمالية تحدد باضطراب النظام المنتج من جهاز القياس. إذا لم يحدث هذا الاضطراب، فلا يوجد معنى للحدود «قيمة» أو «قيمة محتملة» لمتغير في اتجاه الفراغ الوحدوي الذي لا يكون موازياً للمحور الرئيسي لتنسورها.

وسيقع الفرد في التناقضات إذا ما تحدث عن تحديد المكان المحتمل للإلكترون دون الأخذ في الاعتبار التجربة المستعملة لذلك (انظر التناقض لطاقة الحركة، فصل ٢، مقطع ٢ج). كما يجب التأكيد على أن السمة الإحصائية للعلاقة تعتمد على حقيقة أن أثر جهاز القياس يعالج بطريقة مختلفة عن تفاعلات الأجزاء العديدة للنظام بعضها مع بعض. هذا التفاعل الأخير يسبب أيضاً تغييرات في اتجاه المتجه الممثل للنظام في فراغ هيلبرت لكن هذه تكون محددة بالكامل. إذا ما عولج جهاز القياس كجزء من النظام — اللازم لامتداد فراغ هيلبرت — عندئذ تكون التغييرات المعنية أعلاه على أنها غير محددة وتظهر كمحددة.

لكن لا يمكن استعمال هذه المحددات حتى تكون ملاحظة جهاز القياس خالية من اللامحددات. وتسري نفس الاعتبارات كما وضع أعلاه ونجد أنفسنا مضطرين أن يتضمن النظام أعيُننا كجزء منه، وهكذا. وسلسلة السبب



شكل ١٥

والأثر يمكن تحقيقها كمياً فقط إذا اعتبر كل الكون نظاماً واحداً — لكن الفيزياء ستختفي، ويبقى النهج الرياضي. وتقسيم العالم إلى ملاحظ ونظام ملاحظ يمنع الصياغة الحادة لقانون السبب والأثر. (ونظام الملاحظة لا يتطلب دائماً أن يكون إنسانياً، يمكن أيضاً أن يكون جهازاً مثل اللوح الفوتوغرافي.)

ويمكن ذكر الآتي كأتمثلة للحالات التي توجد فيها علاقات السببية: احتوت نظريات حفظ الطاقة والعزم في نظرية الكم، لأن طاقات وعزوم الأجزاء المختلفة لنفس النظام هي كميات تبادلية. إضافة إلى ذلك، تكون المحاور الرئيسية للمقدار q عند الزمن t مختلفة بصورة متناهية في الصغر عن المحاور الرئيسية لـ q عند الزمن $t + dt$. لذا، إذا ما أجري قياسان للمكان متتابعان للمكان على التوالي بسرعة، فمن اليقين عملياً أن الإلكترون سيوجد تقريباً في نفس المكان في المرتين.

٢- احتمالات التداخل

كثير من الاستنتاجات المتناقضة ربما تستنتج من الأسس السابقة إذا لم يعرَ بشكل ملائم بالاضطرابات الناشئة من أجهزة القياس. والتجربة النموذجية التالية تقدم مثلاً نموذجياً لمثل هذا التناقض.

حزمة من الذرات، كلها تشغل في البداية الحالة n ، توجه من خلال مجال F_1 (شكل ١٥). هذا المجال سيسبب انتقالات إلى حالات أخرى إذا كان غير متجانس في اتجاه الحزمة، لكنه لن يفصل ذرات حالة واحدة من تلك في حالة أخرى. افرض أن S'_{nm} تكون دالة التحويل للانتقالات في المجال F_1 حيث $|S'_{nm}|^2$ هي احتمال وجود ذرة ما في الحالة m بعد أن

بزغت من المجال F_1 . للذرات التي تعاني مجال F_2 مثل المجال F_1 ودالة تحويلاتها هي S''_{ml} وهذا المجال مرة أخرى غير قادر على فصل الذرات في الحالات المختلفة، لكن بعد F_2 فيجرب تحديد الحالة الساكنة بواسطة مجال ثالث للقوى. والآن للذرات في الحالة m بعد مرورها بالمجال F_1 فاحتمال انتقالها إلى الحالة l عند مرورها بالمجال F_2 يعطى بالقيمة $|S_{ml}|^2$. وعليه فالجزء المحتمل من الذرات في الحالة l بعد F_2 يجب أن يعطى بالآتي:

$$\sum_m |S'_{nm}|^2 |S''_{ml}|^2. \quad (44)$$

ومن ناحية أخرى، بناءً على المعادلة A (69) فإن دالة التحويل للمجالين المدمجين F_1 و F_2 تكون $S'''_{nl} = \sum_m S'_{nm} S''_{ml}$. والتي ينتج منها القيمة

$$|S'''_{nl}|^2 = \left| \sum_m S'_{nm} S''_{ml} \right|^2 \quad (45)$$

لنفس الاحتمالية كما مثلت بالمعادلة (44). وتختفي التناقضات عندما يلاحظ أن الصيغ (44) و (45) تشير حقيقة إلى تجربتين مختلفتين. والأسباب المؤدية إلى المعادلة (44) تكون صحيحة فقط عندما تجري تجربة بين F_1 و F_2 تسمح بتحديد الحالة الساكنة للذرة. وإجراء هذه التجربة سيغير بالضرورة طور موجة دي بروي في الحالة m بكمية غير معلومة لها رتبة مقدارها واحد، كما تبين في الفصل الثاني فقرة ٢د. وبتطبيق (45) على هذه التجربة يجب لكل عضو $S'_{nm} S''_{ml}$ في المجموع أن يضاعف بمعامل اختياري $\exp(i\varphi_m)$ ومن ثم يؤخذ المتوسط لكل قيم φ_m . هذا المتوسط الطوري يتفق مع (44) التي تطبق لهذه التجربة. وتطبق قواعد حسابات الاحتمالات على $|S_{nm}|^2$ فقط عندما تنكسر سلسلة الأسباب بمشاهدة على المنوال المشروح في المقطع السابق. وإذا لم يوجد كسر من هذا النوع، فلن يكون معقولاً التحدث عن ذرات وحدة في حالة ساكنة بين F_1 و F_2 ، وتنطبق قواعد ميكانيكا الكم.

وربما توضح ثلاثة حالات بهذه التجربة، ويجب تمييزها في أي تطبيق للأسس العامة. وهي:

حالة I: تظل الذرات غير مضطربة بين F_1 و F_2 . احتمال مشاهدة الحالة l بعيداً عن F_2 يكون:

$$\left| \sum_m S'_{nm} S''_{ml} \right|^2.$$

حالة II: تضطرب الذرات بين F_1 و F_2 بإجراء تجربة تمكن تحديد الحالة الساكنة. نتيجة التجربة لن تلاحظ على أية حال. ويكون عندئذ احتمال الحالة l هو:

$$\sum_m |S'_{nm}|^2 |S''_{ml}|^2.$$

حالة III: تجرى التجربة الإضافية للحالة II وتلاحظ نتيجتها. تكون الذرة في الحالة m عندما تمر من F_1 إلى F_2 . وتعطي احتمالية الحالة l بالقيمة

$$|S''_{ml}|^2.$$

ويتم التعرف على الفرق بين الحالتين II و III في كل معالجات نظرية الاحتمالات، لكن الفرق بين I و II لا يوجد في النظريات الكلاسيكية التي تفترض إمكانية المشاهدة بدون اضطرابات. وعندما ينص عليها في شكل عام بما فيه الكفاية فإن هذا التمييز هو مركز كل نظرية الكم.

٣- مفهوم بور للتتمية^٢

مع تقدم نظرية النسبية لأينشتين كان من الضروري لأول مرة معرفة أن عالم الفيزياء يختلف عن العالم المثالي المتصور بدلالة الخبرة اليومية. وأصبح ظاهراً أن المفاهيم العادية تطبق فقط على العمليات التي تعتبر فيها عملياً سرعة الضوء لا نهائية. والمادة العملية الناتجة من التحسن الحديث

في التقنيات العملية تطلبت مراجعة الأفكار القديمة والحصول على أفكار جديدة، لكن لأن العقل دائماً يكون بطيئاً لتكييف نفسه إلى مدى ممتد من الخبرات والمفاهيم، تظهر النظرية النسبية في البداية كتجريد طارد. ومع ذلك، فسهولة حل المشكلة المحيرة قد اكتسبت قبولاً عالمياً. وكما هو واضح مما قيل، فحل التناقضات في الفيزياء الذرية يمكن أن يتحقق فقط بمزيد من نبذ الأفكار القديمة. أهم هذه الأفكار هي أن الظواهر الطبيعية تتبع قوانين دقيقة — مبدأ السببية. في الحقيقة، وصفنا العادي للطبيعة، وفكرة القوانين الدقيقة، يركز على فرصة أنه يكون ممكناً ملاحظة الظواهر بدون تأثير ملموس عليها. لربط سبب محدد بأثر محدد يكون ذي معنى فقط إذا أمكن ملاحظتهما بدون تدخل عنصر خارجي يوتر علاقتهما البيئية. وقانون السببية، وبسبب طبيعته، يمكن فقط تعريفه للأنظمة المعزولة، وفي الطبيعة الذرية وحتى الأنظمة المعزولة تقريباً لا يمكن ملاحظتها. وبما كان هذا متوقفاً، لأنه في الفيزياء الذرية نحن نتعامل مع الكيانات التي تكون (على حد علمنا) هي نهاية المطاف وغير قابلة للتجزئة. لا توجد لا محدودية والتي بمساعدتها يمكن المشاهدة بدون اضطراب ملموس. الثانية بين المتطلبات التقليدية المفروضة على نظرية الفيزيائية أنه يجب تفسير كل الظواهر كعلاقات بين الأشياء الموجودة في الفراغ والزمن. هذا المتطلب عانى من استرخاء تدريجي في مسار تطور الفيزياء. لذا فقد فسر ماكسويل وفاراداي ظواهر الكهرومغناطيسية كإجهادات وتوترات الإثير، لكن مع تقدم النظرية النسبية، جرد الإثير من المادية، وأمكن تمثيل المجال الكهرومغناطيسي كقوة من المتجهات في الفراغ-الزمن على أي حال. الديناميكا الحرارية هي مثال أفضل لنظرية متغيراتها لا يمكن أن تعطي تفسيرات هندسية بسيطة. والآن، فالوصف الهندسي أو الكينماتيكي لعملية ما يعني مشاهدته، يتبع ذلك أن هذا الوصف للعمليات الذرية يمنع بالضرورة الصلاحية الدقيقة لقانون السببية — والعكس.

وأشار بور^٢ أنه لذلك من المستحيل تطلب أن كلا من الاحتياجات تفي بها نظرية الكم. وهي تمثل تنمة وجوانب الظواهر الذرية المستبعد بعضها

بعضاً. هذا الوضع ينعكس بوضوح في النظرية التي تم تطويرها. وتوجد مجموعة من القوانين الرياضية الدقيقة، لكنها لا تعبر عن علاقات بسيطة بين الأشياء الموجودة في الفراغ والزمن. والتوقعات المشاهدة لهذه النظرية يمكن أن توصف بصور الموجة والجسيم وكلاهما له نفس الصلاحية. هذا للاتحديد لصورة العملية هو نتيجة مباشرة للاتحديدية لمفهوم «المشاهدة»* — حيث لا يمكن أن نقرر، إلا اختياريًا، أي الأشياء تعتبر جزءًا للنظام المُشاهد وأيها جزء لجهاز المُشاهد. وفي صيغ النظرية غالبًا ما تصنع هذه الاختيارية أن نستخدم طرقًا تحليلية مختلفة لمعالجة تجربة فيزيائية فردية، بعض الأمثلة لهذه ستعطى لاحقًا. وحتى عندما تؤخذ هذه الاختيارية في الاعتبار فإن مفهوم «المشاهدة» سينتمي إلى مجموعة الأفكار المستعارة من خبرات الحياة اليومية. ويمكن فقط نقلها إلى الظواهر الذرية عند مراعاة الاعتبار الواجب في القيود الموضوعية على كل أوصاف الفراغ-الزمن بقاعدة عدم اليقين. ويمكن تلخيص العلاقات التي نوقشت في الشكل الآتي؛

النظرية الكلاسيكية

علاقات سببية لظواهر وصفت بدلالة الفراغ والزمن

نظرية الكم		إما
أو		
علاقات سببية عبر عنها بالقوانين الرياضية	}	ظواهر وصفت بدلالة الفراغ والزمن لكن قاعدة عدم اليقين
لكن وصف فيزيائي للظواهر في فراغ — زمن مستحيل		
	بدائل ربطت إحصائيًا	

وبعد محاولات لتناسب هذه التتمة الأساسية لوصف الفراغ-الزمن والسببية نهج مفهومي واحد يكون الفرد في وضع التحكم على درجة من

* يجب ملاحظة أن المصطلح «المشاهدة» كما استخدم هنا لا يشير إلى مشاهدة الخطوط على الألواح الفوتوغرافية، إلخ، بل إلى مشاهدة «الإلكترونات في مدة منفردة».

التوافق من أساليب نظرية الكم (على وجه الخصوص نظرية التحويل). لتشكيل أفكارنا واللغة لتتفق مع الحقائق المشاهدة للفيزياء الذرية هي مهمة صعبة جداً، كما كان الحال في نظرية النسبية. وفي حالة نظرية النسبية، ثبت ميزة العودة إلى المناقشات الفلسفية لمشكلات الفراغ والزمن. وبنفس الطريقة يكون من المريح الآن استعراض المناقشات الأساسية، والمهم لنظرية المعرفة، لصعوبة الفصل بين الجوانب الذاتية (الوصفية) والموضوعية للعالم. وكثير من التجريدات المميزة للفيزياء النظرية الحديثة نوقشت في فلسفات القرون الماضية. وفي ذلك الوقت اعتبرت هذه التجريدات تمارين ذهنية من قبل هؤلاء العلماء المهتمين بالواقعية، لكن اليوم نحن مضطرون باستخدام تحسينات فن التجربة لاعتبارهم جدياً.

الفصل الخامس

مناقشة التجارب الهامة

في الفصول السابقة نوقشت أسس نظرية الكم، إلا أن فهمها الحقيقي يتم من خلال علاقتها بالحقائق العملية التي تفسرها النظرية. وهذا حقيقي على وجه الخصوص فيما يتعلق بالأساس العام للتنمية (خواص الجسيم والموجة). لذلك فمن الضروري لشرح الأسس المنفصلة مناقشة تجارب أخرى أقل مثالية من تلك التي نوقشت من قبل.

١- تجارب س. ت. ر. ويلسون C. T. R. Wilson

ربما يسهل تفسير الملامح الأساسية لفوتوغرافيا س. ت. ر. ويلسون بمساعدة الصورة الكلاسيكية للموجة والجسيم (الكورباسكولار). وهذا التفسير يكون متحققاً بالكامل من منطلق نظرية الكم. ولا تكون علاقات عدم اليقين أساسية لتفسير الحقيقة الأولية للمسارات المستقيمة المتوازية لجسيمات ألفا. ودائمًا سيكون صحيحًا تطبيق النظرية الكلاسيكية لهذه الظواهر شبه الميكروسكوبية، وتكون نظرية الكم ضرورية فقط لتفسير الملامح الأدق. وسيكون مثيرًا على أي حال مناقشة النظرية الكمية لفوتوغرافيا ويلسون. وسنواجه في الحال الاختيارية في مفهوم المشاهد الذي ذكر، ويكون ظاهرًا ملائمًا إذا ما كانت الجزيئات التي ستتأين تعتبر كمنتمية للنظام المشاهد أو لجهاز المشاهدة. اعتبر أولاً المرادف الأخير. النظام الذي سيشاهد عندئذ يتكون من جسيم - ألفا واحد فقط، وتعيين المكان ينشأ من التأين سيكون ممثلًا في الوعاء الرياضي للنظرية

بحزمة الاحتمالية $|\psi(q')|^2$ في الفضاء الإحداثي $q = x, y, z$ لجسيم ألفا. وستجرى الحسابات فقط لواحدة من ثلاثة درجات الحرية.

لو أخذ الزمن عند هذا التعيين $t = 0$ ، ولو كان زمن التعيين السابق معلومًا أيضًا، فيمكن تعيين عزم الجسيم عند الزمن $t = 0$: افرض أن \bar{p} و \bar{q} تمثل قيم أكبر احتمال للعزم والإحداثي عند هذا الزمن، و Δp و Δq هي الأخطاء المحتملة. ستكون حصيدا عدم اليقين أكبر بقدر ملموس من h لأي حالة فعلية، لكن يمكن أن نفترض أن $\Delta p \Delta q = h/2\pi$ (انظر الملاحظات المعنية بقياسات التحلل، فصل ٢ بقرة ٢٢). هذه تكون حالة معينة؛ وتكون عندئذ معلومة [المعادلة (15)] أن:

$$\psi(q'_0) = e^{-(q'_0 - \bar{q})^2 / 2(\Delta q)^2 - (2\pi i/h)\bar{p}(q'_0 - \bar{q})}.$$

(المعامل 0 يدل على أن q'_0 هي قيمة الإحداثي عند الزمن $t = 0$). وتكون عندئذ معادلات الكم النظرية هي:

$$p = p_0 = \text{Const.},$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\mu} p.$$

وبالرغم من أن q و p غير تبادلية، فالمعادلة الأخيرة يمكن تكاملها إلى:

$$q = \frac{1}{\mu} p t + q_0.$$

للحصول على احتمالية السعة $\psi(q')$ عند الزمن t ، يجب حساب دالة التحويل من المعادلة (41) A والمعادلة (42) A:

$$\left(\frac{t}{\mu} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'_0} + q'_0 \right) S(q'_0 q') = q' S(q'_0 q').$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$S(q'_0 q') = a e^{(2\pi i \mu / h t)(q' q'_0 - q_0'^2 / 2)}; \quad (46)$$

ويمكن إيجاد التوزيع عند زمن t بواسطة A (69)

$$\psi(q') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(q'_0) S(q'_0 q') dq'_0,$$

التي تصبح، عند تقييم التكامل:

$$\psi(q') = b e^{[i\bar{q} + i(q' - \bar{p}t/\mu)]^2 / [2(\Delta q)^2(1+i/\beta)]}, \quad (47)$$

حيث:

$$\beta = \frac{h}{2\pi} \frac{t}{\mu} \frac{1}{(\Delta q)^2} = \Delta p \frac{t}{\mu \Delta q}.$$

ويتبع ذلك:

$$|\psi(q')|^2 = b' e^{-(q' - p't/\mu - \bar{q})^2 / [(\Delta q)^2 + (t\Delta p/\mu)^2]}. \quad (48)$$

وعليه فإن القيمة الأكثر احتمالاً لـ q' هي $\bar{q} + (t/\mu)\bar{p}$ ، وهي النتيجة المتوقعة من النظرية الكلاسيكية.

ومتوسط مربع الخطأ $(\Delta q)^2 + (t\Delta p/\mu)^2$ في q' تكون من مقطعين مقابلين لعدم اليقين في q'_0 ، p'_0 وقيمتها تتفق مرة أخرى مع تلك المحسوبة كلاسيكياً.

وإذا ما طبقت هذه الطرق لكل درجات الحرية الثلاثة، x, y, z فيرى أن مسار مركز حزمة الاحتمالية يكون خطأً مستقيماً. وجدير بالملاحظة أن هذه النتيجة تنطبق فقط بينما يتحرك جسيم ألفا بدون اضطراب. وكل تأين متتابع لجزيء الماء سينقل الحزمة (48) إلى تجمع هذه الحزم (الحالة II ص 66). إذا كان التأين مصحوباً بمشاهدة الموضع، احتمالية حزمة صغيرة ذات شكل مثل (48) لكن بمعاملات جديدة تكون منفصلة عن التجمع (الحالة III ص 66). هذا يكون نقطة البداية لأوربيت جديد

وهكذا. والانحراف الزاوي بين جزئي أوربيتال متتالين يعين بعزوم الجسيم والإلكترون الذري المتفاعلة معها، التي تعلق الفروق بين مسارات ألفا وبيتا. وفيما يعني الوجه الشكلية للحسابات السابقة، ربما يلاحظ أن التحويل من q'_0 إلى q' يمكن أن ينفذ عن طريق الطاقة. وبالمعادلة A (70):

$$S(q'_0 q') = \int S(q'_0 E) S(E q') dE,$$

وعليه:

$$\psi(q') = \int S(E q') dE \int \psi(q'_0) S(q'_0 E) dq'_0.$$

والدوال $S(E q'_0)$ و $S(q' E)$ هي الدوال الموجية العيارية لشروندجر لحالة الإلكترون الحر؛ والدالة $\psi(q')$ يمكن أن تبني بتطابق دوال شروندجر هذه. استخدمت هذه الطريقة من قبل داروين في بحث حركة حزم الاحتمالية. ولاستكمال هذه المناقشة، سوف نجري معالجة رياضية لفوتوغرافات ويلسون مفترضين أن الجزيئات التي ستأين هي جزء من النظام. وهذه الطريقة أكثر تعقيداً من الطريقة السابقة، لكن ذات ميزة أن التغيرات غير المتصلة في دالة الاحتمالية تنحسر خطوة واحدة وتظهر أقل تناقضاً مع الأفكار البديهية.

ولتجنب التعقيدات سنأخذ فقط في الاعتبار جزيئين وجسيم ألفا، ونفترض أن مركز كتل الجزيئين مثبت عند النقاط $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$. وجسيم α في حركة بعزوم p_x, p_y, p_z وإحداثياتها x, y, z . وإحداثيات الإلكترونات في الجزيئات يرمز لها برموز منفردة q_1, q_2 على الترتيب. و فراغ التركيب سيشمل فقط x, y, z, q_1, q_2 . ونستفسر لاحتمال أن يتأين الجزيئان ونبين أنها كم صغير مهمل إلا إذا كان الخط الواصل لهما له نفس اتجاه المتجهة $(p_x p_y p_z)$. وسيهمل كل التفاعلات بين الجزيئين، وسيعامل تفاعلها مع جسيم ألفا كاضطراب^٢. ويمكن كتابة طاقة التفاعل كالاتي:

$$\left. \begin{aligned} H^{(1)}(1) + H^{(1)}(2) &= H^{(1)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1, q_1) \\ &+ H^{(1)}(x - x_2, y - y_2, z - z_2, q_2), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

تعتبر كالمؤثرات العاملة على دوال شرودنجر. والمعادلة الموجية تكون عندئذ:

$$\left. \begin{aligned} &\underbrace{-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi}_{\alpha\text{-Particle}} + \underbrace{H^0(q_1)\psi + H^0(q_2)\psi}_{\text{Molecules}} \\ &+ \underbrace{\epsilon [H^{(1)}(1) + H^{(1)}(2)]\psi}_{\text{Interaction}} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

وفيهما $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $H^0(q_i)$ هو مؤثر الطاقة للجزيء i و ϵ هي معامل الاضطراب مرفوعة للقوة التي لها دالة موجية مفكوكها: $\psi = \psi^{(0)} + \epsilon\psi^{(1)} + \epsilon^2\psi^{(2)} \dots$ وبالتعويض بهذه السلسلة في المعادلة الموجية ومساواة كل قوة ϵ بالصفر، نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi^{(0)} + H^{(0)}(1)\psi^{(0)} + H^{(0)}(2)\psi^{(0)} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial t} \\ &= 0, \\ &-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi^{(1)} + H^{(0)}(1)\psi^{(1)} + H^{(0)}(2)\psi^{(1)} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t} \\ &= -[H^{(1)}(1) + H^{(1)}(2)]\psi^{(0)}, \\ &-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi^{(2)} + H^{(0)}(1)\psi^{(2)} + H^{(0)}(2)\psi^{(2)} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t} \\ &= -[H^{(1)}(1) + H^{(1)}(2)]\psi^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

والحلول المميزة للمعادلة الأولى تكون:

$$\psi^{(0)} = e^{(2\pi i/h)\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \varphi_{n_1}(q_1) \varphi_{n_2}(q_2) e^{-(2\pi i/h)E^{(0)}t}, \quad (52)$$

حيث

$$H^{(0)}(q) \varphi_n(q) = E_n \varphi_n(q), \quad (53)$$

و

$$E^0 = \frac{1}{2\mu} p^2 + E_{n_1} + E_{n_2}. \quad (54)$$

هذه الحلول تقابل للحالة التي يكون فيها عزم جسيم ألفا معلومًا تمامًا مساويًا \mathbf{p} ، مكانها بالكامل غير معروف، بينما تكون الجزيئات معروفة أنها في الحالات n_1, n_2 على الترتيب.

كل التفاعلات تهمل، والمسألة هي تعيين كيف ستعدل التفاعلات في هذه الشئون. ربما يحل هذا بتعيين $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ طبقًا لطريقة بورن Born. تفك هذه الكميات أولاً في حدود دوال تعامدية $\varphi_{m_1}(q_1)$ orthogonal و $\varphi_{m_2}(q_2)$

$$\psi^{(i)} = \sum_{m_1} \sum_{m_2} v_{m_1 m_2}^{(i)} \varphi_{m_1}(q_1) \varphi_{m_2}(q_2), \quad (55)$$

التي تكون فيها $v_{m_1 m_2}^{(i)}$ دوال في x, y, z, t . ومعنى هذه المقادير يكون

$$\left| \sum_i \epsilon^i v_{m_1 m_2}^{(i)} \right|^2 \quad (56)$$

وهي احتمال مشاهدة الجزيء 1 في الحالة m_1 والجزيء 2 في الحالة m_2 والإلكترون عند x, y, z .

بالتعويض بمعادلة (55) لحالة $i = 1$ في المعادلة الأولى للمعادلات (51)، نحصل على:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla^2 + E_{n_1} + E_{n_2} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) v_{n_1 m_2}^{(1)} = - [h_{n_1 m_2} (1) \delta_{n_2 m_2} + h_{n_2 m_2} (2) \delta_{n_1 m_1}] e^{(2\pi i/\hbar)[\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E^0 t]},$$

التي استخدمت في الاختصارات:

$$\left. \begin{aligned} h_{n_1 m_1} (1) &= \int \varphi_{m_1}^* (q_1) H^{(1)} (1) \varphi_{n_1} (q_1) dq_1 \\ h_{n_2 m_2} (2) &= \int \varphi_{m_2}^* (q_2) H^{(1)} (2) \varphi_{n_2} (q_2) dq_2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

الإحداثيات q_1, q_2 قد استبعدت من مزيد من الاعتبار، والدوال $h(1)$ و $h(2)$ دوال في x, y, z و x_1, y_1, z_1 أو x_2, y_2, z_2 على الترتيب. ويمكن تبسيط هذه المعادلات بكتابة:

$$v_{m_1 m_2}^{(1)} (xyzzt) = w_{m_1 m_2}^{(1)} (xyz) e^{-(2\pi i/\hbar)E^0 t},$$

وعليه:

$$\left(\nabla^2 + k_{m_1 m_2}^2 \right) w_{m_1 m_2}^{(1)} = \frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} \left(h_{n_1 m_1} (1) \delta_{n_2 m_2} + h_{n_2 m_2} (2) \delta_{n_1 m_1} \right) e^{(2\pi i/\hbar)\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (58)$$

حيث:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} k_{m_1 m_2}^2 = \left[E_{n_1} + E_{n_2} + \frac{1}{2\mu} p^2 - E_{m_1} - E_{m_2} \right]. \quad (59)$$

في هذا التعبير تكون طاقة الحركة لجسيم ألفا أكبر بكثير من الحدود الأخرى التي يمكن أخذها (بتقريب كافٍ)

$$k_{m_1 m_2}^2 = k^2 = \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}. \quad (60)$$

والمعادلات (58) تكون كلها ذات شكل:

$$(\nabla^2 + k^2) w_{m_1 m_2}^{(1)} = \rho_{m_1 m_2}(xyz), \quad (61)$$

وهي المعادلة العادية للحركة الموجية؛ و $\rho_{m_1 m_2}(xyz)$ هي كثافة المتذبذب منتج الموجة وحيث إنها معقدة، أيضاً تعيين أطوارها. ويعطي حل معادلة (61) بقاعدة Huyghen:

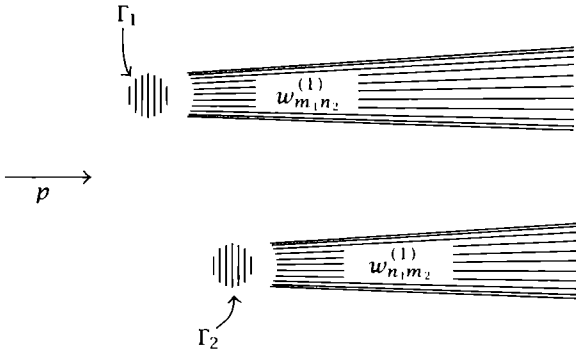
$$w_{m_1 m_2}^{(1)} = \iiint \rho_{m_1 m_2}(x' y' z') \frac{e^{-ikR}}{R} dx' dy' dz',$$

حيث R هي المسافة من x', y', z' إلى x, y, z .

وحيث إنه طبقاً للمعادلة (58) تكون مساوية للصفر إلا إذا كانت $m_1 = n_1$ أو $m_2 = n_2$ فإن كل قيم $w_{m_1 m_2}^{(1)}$ تكون صفراً فيما عدا $w_{n_1 n_2}^{(1)}$ و $w_{n_1 m_2}^{(1)}$ ، وكتقريب أولي، سيثار فقط واحد من الجزئين. وهذا متوافق مع النظرية الكلاسيكية، التي تنص على أن احتمال اصطدامين يكون من الدرجة الثانية. وطابع الدوال $w_{n_1 m_2}^{(1)}$ و $w_{m_1 n_2}^{(1)}$ يعين وصفاً بالمعادلة (57):

$$\rho_{m_1 n_2} = \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} h_{n_2 m_1}(x - x_1, y - y_1, z - z_1) e^{(2\pi i/h)\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}.$$

والتذبذبات (الوهمية) المنتجة للموجة تكون عندئذٍ كلها موضوعة في المنطقة Γ_1 حول x_1, y_1, z_1 (انظر الشكل ١٦) والتي فيها $h_{n_2 m_1}$ تختلف بشكل ملموس عن الصفر. وهي تذبذب مترابطة، وطورها يعين أساساً بالمعامل



شكل ١٦

وفي الشكل رسمت خطوط ذات الطور المتساوي عمودية على $e^{(2\pi i/h)p \cdot x}$ وهي على أبعاد λ_0 . وطبقاً للمعادلة (61) فإن أطوال الموجات المنبعثة بالمتذبذبات هي أيضاً λ_0 ، والتطبيق البسيط لقاعدة Huyghen يوضح أن اضطراب الموجة سيكون له طور ملموس فقط في منطقة المخروط المظلمة والتي يكون محورها في اتجاه \mathbf{p} (شكل ١٦). ومقطع هذه المنطقة بالقرب من x_1, y_1, z_1 يعين بمقطع الجزيء: Γ_1 وفتحها الزاوية أيضاً تعتمد على Γ_1 تكون أكبر عندما تكون Γ_1 صغيرة — أي تتحقق العلاقة غير اليقينية $\Delta p_x \Delta x \sim h/2\pi$. وتنطبق الاعتبارات المماثلة على $w_{n_1 m_2}^{(1)}$ وتكون مختلفة عن الصفر فقط في شعاع يصدر في Γ_2 ، وأيضاً له الاتجاه \mathbf{p} . ونصل الآن إلى التقريب الثاني: $v_{m_1 m_2}^{(2)}$ يمكن كتابتها

$w_{m_1 m_2}^{(2)} \exp(-2\pi i/h) E^0 t$ (51) تختصر إلى:

$$\left. \begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2) w_{m_1 m_2}^{(2)} \\ & = \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left\{ \sum_l w_{l m_2}^{(1)} h_{l m_1}(1) + \sum_l w_{m_1 l}^{(1)} h_{m_2 l}(2) \right\}, \\ & = \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left\{ w_{n_1 m_2}^{(1)} h_{n_1 m_1}(1) + w_{m_1 n_2}^{(1)} h_{m_2 n_2}(2) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ويبقى دائماً الطرف الأيمن لهذه المعادلة مساوياً للصفر إلا إذا وقع واحد من الجزيئين في شعاع يصدر عند الآخر، لأن $w_{n_1 m_2}^{(1)}$ تكون مختلفة عن الصفر فقط في شعاع يصدر في Γ_2 ، و $h_{n_1 m_1}(1)$ فقط في Γ_1 . ما لم تتقاطع تلك المنطقتان، سيكون الحد الأول صفراً، وبالمثل الحد الثاني. لذا يمحي احتمال التآين الآتي أو الإثارة للذرتين حتى في التقريب الثاني ما لم يكن الخط الواصل بين مركزي ثقلهما عملياً موازياً لاتجاه حركة جسيم ألفا. وهذه الاعتبارات يمكن سحبها على حالة أي عدد من الجزيئات بدون تعديلات جوهرية. فلكل جزيء مضاف يجب إجراء التقريبات بخطوة أبعد، لكن الأسس والنتائج ستبقى على حالها.

لقد أثبت أن الجزيء المتأين سيقع عملياً على خطوط مستقيمة، وأن الحيود من الاستقامة ستحقق علاقات عدم اليقين. عندئذٍ، فتضمن الجزيئات في النظام المشاهد، ليس ضرورياً إدخال التغيير غير المتصل لحزمة الاحتمالية، لكن لو أخذنا في الاعتبار الطرق التي بها يمكن مشاهدة فعلية للجزيء، فإن عدم التغيير المتصل سيلعب مرة أخرى دوراً ما (الآن عدم التغيير المتصل في حزمة الاحتمالية في الفراغ الشكلي (x, y, z, q_1, q_2)).

٢- تجارب الحيود

يمكن ببساطة شرح حيود الضوء أو المادة (دافسون-وجرمر، وطومسون، روب، وكيكوشي) بمحزوزات وذلك بالاستعانة بالنظريات الموجية الكلاسيكية. فتطبيق نظريات المكان-الزمن على هذه التجارب مبرر من وجهة نظر نظرية الكم، حيث إن علاقات عدم اليقين لن تؤثر بأي طريقة على الهيئة الهندسية للموجات، لكن فقط على ساعاتها (انظر فصل ٣ مقطع ١).

ويلجأ فقط إلى نظرية الكم عند مناقشة العلاقات الديناميكية متضمنة طاقة وعزم الموجات. وتتفق نظرية الكم للموجات مع النظرية الكلاسيكية مادام اعتبر نمط الحيود الهندسي (من الظاهر عدم فائدة إثبات ذلك بالحسابات المستفيضة). ومن جهة أخرى، فقط أعطى دوان Duane معالجة مثيرة لظواهر الحيود من نظرية الكم لصورة الجسيم-الموجة

(الكورباسكيولار)، وللتبسيط نتخيل أن الكورباسكل انعكس من سطح المحزوز المقسم ذي الثابت d . افترض أن المحزوز نفسه يكون متحركًا. فالانتقال في اتجاه x ينظر إليه على أنه حركة دورية، في حالة اعتبار التفاعل مع الجسيمات الساقطة عليه، ولا يحدث تغير في التفاعل بسبب إزاحة المحزوز بمقدار d . وعليه يمكن استنتاج أن حركة المحزوز في هذا الاتجاه ستكون مكماه ويكون عزمها p_x ذا قيم nh/d (كما نصل إليها مباشرة من الشكل السابق للنظرية: $\int pdq = nh$). وحيث إن العزم الكلي للمحزوز والجسيم يجب أن يظل غير متغير، فعزم الجسيم يمكن أن يتغير فقط بمقدار mh/d (حيث m عدد صحيح):

$$p'_x = p_x + \frac{mh}{d}.$$

علاوة على ذلك، وبسبب كبر الكتلة، يمكن للمحزوز أن يكون له قدر ملموس من الطاقة بحيث:

$$p_x'^2 + p_y'^2 = p_x^2 + p_y^2 = p^2.$$

إذا كانت θ هي زاوية السقوط، θ' هي زاوية الانعكاس، يكون لدينا:

$$\cos \theta = \frac{p_y}{p}, \quad \cos \theta' = \frac{p_y'}{p},$$

وعليه:

$$\sin \theta' - \sin \theta = \frac{mh}{pd}.$$

ومن معادلة A (83) للطول الموجي لموجة مصاحبة لجسيم، يتبع أن:

$$d (\sin \theta' - \sin \theta) = m\lambda,$$

متفقة مع النظرية الموجية العادية.

والطبيعة المزدوجة لكل من المادة والضوء تنشئ الكثير من الصعاب قبل أن تفهم بوضوح الأسس الفيزيائية المتضمنة، والتناقض (بارادوكس) الآتي عادة ما نوقش. تتلاشى بسرعة القوى بين الجزء من المحزوز والجسيم بالمسافة بينهما. لذلك يجب أن يعين اتجاه الانعكاس فقط بأجزاء المحزوز في الجوار المباشر للجسيم الساقط، لكن مع ذلك وجد أن أجزاء المحزوز المنفصلة على بعد أكبر تكون العوامل الهامة في تعيين دقة قمم الحيود. ومصدر هذا التناقض هو اختلاط تجربتين. (الحالتين I, II، ص ٦٦). إذا لم تجر تجربة تسمح بتعيين مكان الجسيم قبل انعكاسه. فلن يوجد تعارض مع المشاهدة إذا لم يعمل المحزوز بكامله عليها. من ناحية أخرى، إذا أجريت تجربة تعيين أن الجسيم سيصدم قطاعاً من المحزوز طوله Δx ، فستظل معرفة عزم الجسيم أساساً غير دقيقة بمقدار $\Delta p \sim h/\Delta x$. واتجاه انعكاسها سيكون لذلك غير دقيق. والقيمة العددية لعدم الدقة في الاتجاه هي بالضبط المقدار الذي يحسب من قوة تفريق المقدار الذي يحسب من قوة تفريق المحزوز للخطوط $\Delta x/d$ إذا كانت $\Delta x \ll d$ فقمم التداخل ستختفي كلية، ليس حتى الوصول إلى هذه الحالة يمكن أن يقارن بتلك المتوقعة من النظرية الكلاسيكية للجسيم.

٣- تجربة أينشتين وروب Rupp

وتمثل التجربة الآتية بارادوكس آخر: ذرة ما (شعاع قناة) تمر بسرعة v خلال فتحة S لها العرض d وتشتع ضوءاً خلال عملها هذا. ويحلل هذا الضوء بواسطة ميكروسكوب وضع خلف الفتحة S . وحيث إن الضوء يصل إلى الميكروسكوب فقط خلال زمن $t = d/v$ ، فإن قطار الموجات التي ستحلل له طول محدد، وسيظهرها الميكروسكوب على أنها خط له عرض يقابل مدى التوارد frequency:

$$\Delta v = \frac{1}{t} = \frac{v}{d}.$$

ومن جهة أخرى، تمنع نظرية الكورباسكولار (الجسيم-الموجة) هذا الوسع broadening. تشع الذرة ضوءاً أحادي اللون monochromatic، طاقة كل جسيم فيها هي $h\nu$ ، وسيمنع الحاجز diaphragm بسبب كبر كتلته تغير طاقة الأجسام. وتقع المغالطة في إهمال أثر دوبلر وحيود الضوء عند الفتحة. هذه الفوتونات التي تصل P من الذرة لا تشع كلها عمودياً على شعاع القناة، والفتحة aperture الزاوية لشعاع الفوتونات تكون $\sin \alpha \sim \lambda/d$ بسبب الحيود. وتغير التردد نتيجة لدوبلر يكون:

$$\Delta\nu = \sin \alpha \frac{v}{c} \nu,$$

أو

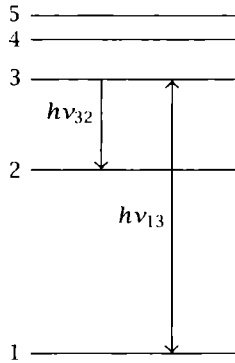
$$\Delta\nu = \frac{\lambda\nu}{cd} \nu = \frac{\nu}{d},$$

متوافقة مع النتائج السابقة. وفي هذه التجربة فإن صلاحية قانون الطاقة للكورباسكولار يكون لذلك منسجماً أو متوافقاً مع متطلبات البصريات الكلاسيكية.

٤- انبعاث، وامتصاص، وتفريق الأشعة

(أ) تطبيق قوانين حفظ الطاقة والمادة والعزم

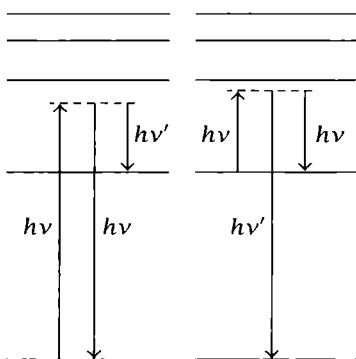
إن فرضية وجود حالات ساكنة، مصاحبة لنظرية الفوتونات؛ كافية لشرح تفاعل الذرات مع الأشعة. وكان هذا هو أول نجاح قاطع لنظرية بور Bohr. وأهم نتائج هذه النظرية يمكن تلخيصها هنا. افترض أن الحالات الساكنة لذرة ما ترقم $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (شكل ١٧) عدداً من الحالة العادية. فذرة في الحالة 3، على سبيل المثال، تستطيع تلقائياً أن تجري انتقاله إلى الحالة 2 وتشع فوتوناً من الطاقة $h\nu_{32} = E_3 - E_2$. وبنفس الطريقة، ذرة في الحالة 1 تمتص فوتوناً من الطاقة $h\nu_{31} = E_3 - E_1$ وتثار إلى الحالة 3. ويجب إبراز أن هذه العبارات السابقة يجب أن تؤخذ حرفياً، وليس



شكل ١٧

فقط على أن لها رموزاً ذات معنى، حيث إنه من الممكن (حسب تجربة شتين-جيرلاخ Stern-Gerlach) تعيين الحالة الساكنة للذرات قبل وبعد الانبعاث. ويتبع ذلك أن شدة خط انبعاث ما يتناسب مع عدد الذرات في الحالة العليا للحالات المحدث لها، بينما شدة خط الامتصاص تكون متناسبة مع عدد الذرات في الحالة الدنيا. هذه النتائج، التي أثبتت بالتجربة، هي كلية سمات نظرية الكم ولا يمكن استنباطها من النظرية الكلاسيكية، ليس الموجة أو تمثيل الجسيم، حيث إنه حتى وجود قيم طاقة محددة لا يمكن إطلاقاً تفسيرها بالنظرية الكلاسيكية.

ونقابل نفس الوضع في حالة التشتت. فإذا أثرت ذرة ما في الحالة 1 بواسطة فوتون $h\nu$ ، يمكنها إعادة انبعاث نفس كم الضوء بدون تغير في الحالة (مع فرض أن كتلة النواة غير محدودة)، أو يمكنها إرسال كم ضوء ذي طاقة $h\nu' = h\nu - E_2 + E_1$ بالانتقال إلى الحالة 2 (انتقاله سميكل Smekal، انظر شكل ١٨). وشدة كلا نوعي تشتت الضوء يتناسب مع عدد الذرات في الحالة 1. وإذا ما شععت ذرة في الحالة 2 بضوء ذي تردد ν ، فيمكنها بعث فوتون بطاقة $h\nu' = h\nu + E_2 - E_1$ ذي طول موجي أقصر بالانتقال إلى الحالة 1، ومرة أخرى فإن شدة هذا الضوء المشتت



شكل ١٨

2. وقد أكدت بتجارب رامان Raman °. (عكس-ستوكس anti-Stokes) تكون متناسبة مع عدد الذرات في الحالة

(ب) قاعدة التناظر وطريقة الشحنات الظاهرية

افتراضية الحالات الساكنة ونظرية الفوتونات، وبسبب طبيعتهما، لا يمكن أن تولد أي معلومات إما بخصوص تداخل الضوء المنبعث أو حتى احتمالية الانتقالات المعنية مسبقاً. ويمكن تعليل خواص التداخل بالكامل بواسطة النظرية الموجية الكلاسيكية، لكنها غير قادرة على تعليل الانتقالات. ولمعالجة هذا بنجاح نحتاج إلى نظرية الكم المتوافقة ذاتياً. ومن الحقيقي أن الربط العبقري للحجج المبنية على قاعدة التناظر يمكن أن يجعل نظرية الكم للمادة مع النظرية الكلاسيكية للأشعة تعطي قيماً كمية quantitative لاحتمالات الانتقالات، أي، إما باستخدام كثافة الشحنات الظاهرية لشروندجر أو مكافأتهما، عناصر المصفوفة المثلثة لعزم ذي القطبين الكهربائي للذرة. هذه الصياغة لمشكلة الأشعة بعيدة عن الرضى، لكن على أي حال، تقود بسهولة إلى استنتاجات خاطئة. هذه الطريقة يمكن فقط تطبيقها بحرص شديد، كما ستوضح الأمثلة التالية. اعتبر الحالة الأولى لذرة ما تحوي إلكترونًا

واحدًا، ونواتها لها كتلة غير محددة. لو كانت $x \equiv (x, y, z)$ هي إحداثي الإلكترون، و $\psi_0(x)$ هي دالة شرودنجر، فإنه:

$$-ex_{nm} = -e \int x \psi_n \psi_m^* d\tau \quad (63)$$

تكون عنصر المصفوفة المثلثة العزم بين قطبي الذرة. هذه المصفوفة، بشكل صارم، يمكنها الدخول في الحسابات بناءً على قواعد نظرية الكم للإلكترون، التي تتضمن الأشعة. وتفسر كالعزم بين القطبين للمتذبذب الظاهري منتج الأشعة المنبعثة خلال الانتقال $n \rightarrow m$. يمكن استنتاج هذا من قاعدة التناظر بتذكر أنه قد وضح أن $x_{nm} \rightarrow x_n(n-m)$ في مدى أعداد كم عديدة، حيث $x_n(n-m)$ هي معامل فوريير Fourier للحركة الكلاسيكية. ولذلك يفترض أن x_{nm} ستدخل في الصيغ التي تعين شدة الأشعة كممثل طريقة $x_n(n-m)$ أي $|x_{nm}|^2$ ستكون الاحتمالية المسبقة لانتقاله $n \rightarrow m$. يجب التركيز على أن هذه نتيجة شكلية، إنها لم تستنبط من أي قاعدة فيزيائية لنظرية الكم.

ولربما تصبح معقولة باعتبارات أخرى، تبرز سمتها غير المرضية بشكل أوضح. وقد أشير إلى أن حلول ψ_n لمعادلة شرودنجر تكون تقريبات أولية لحلول المعادلات الكلاسيكية للمادة — والموجة [انظر A (8)]. ويطلق على الحل الحقيقي الرمز ψ^c ، الإشعاع من توزيع الشحنة الممثل سيعين بالعزم بين القطبين:

$$-e \int \psi^c \psi^{c*} x d\tau$$

بشرط أن امتداد هذا التوزيع يكون صغيرًا مقارنة بطول موجة الأشعة المنبعثة؛ والآن:

$$\psi^c \sim \sum_n a_n \psi_n e^{-2(2\pi i/h)E_n t},$$

مبيناً أن الأشعة المحسوبة بواسطة هذا التوزيع الكلاسيكي، يجب أن يعين بواسطة

$$-e \sum_{nm} a_n a_m^* x_{nm} e^{(2\pi i/h)(E_n - E_m)t}. \quad (64)$$

هذه الصيغة بكل تأكيد خاطئة حيث إنها استنبطت من نظرية كلاسيكية صرفة؛ شدة الأشعة بتردد $(E_n - E_m)/n$ يعتمد على المعامل a_m للحالة النهائية، وأيضاً على a_n للحالة الأولية. وهذا تناقض مباشر لمسلمة بور الأساسية. ويمكن إزالة التناقض اختياريًا بفصل المجموع إلى حدودها المنفصلة، مزيلاً العوامل العاكسة ومربطاً كل حد لمستوى أعلى. وستظهر مرة الأخرى المعادلة (63) لعزم بين القطبين الظاهري المصاحب للانتقالة.

(ج) المعالجة الكاملة للأشعة والمادة

تتطلب المعالجة المتوافقة لظواهر الأشعة تطبيقاً أنياً لنظرية الكم للأشعة والمادة، بصرف النظر عن استخدام (أي من) تمثيل الجسيم أو الموجة. استعمل ديراك Dirac^١ في نظريته لغة تمثيل الجسيم، لكنه استغل الاستنتاجات المستنبطة من النظرية الموجية للأشعة في استنتاج دالة هاميلتون. وستلخص هنا الأفكار الأساسية لهذه النظرية.

ستمثل الذرة بإلكترون منفرد يتحرك في مجال قوى إلكتروستاتيكية ϕ_0 . والمعادلة النسبية الثابتة لمسألة الإلكترون الواحد تكون طبقاً لديراك^٢ (ϕ_0 ، الجهد العددي، $\phi_i [i = 1, 2, 3]$ ، جهود كهرومغناطيسية):

$$p_0 + \frac{e}{c} \phi_0 + \alpha_i \left(p_i + \frac{e}{c} \phi_i \right) + \alpha_4 mc = 0, \quad (65)$$

أو

$$H = -e\phi_0 - \alpha_i c \left(p_i + \frac{e}{c} \phi_i \right) - \alpha_4 mc^2. \quad (66)$$

(استخدم مصطلح الجمع العادي). وهنا، كما سبق، فإن p_i تكون عزوم مصاحبة لـ q_i ، و α هي مؤثرات تحقق المعادلات:

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}; \quad \alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0; \quad \alpha_4^2 = 1. \quad (67)$$

ومن معادلات الحركة يترتب على ذلك أن:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \alpha_{ik} c \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\alpha_i c. \quad (68)$$

وباستثناء المعامل $(-c)$ α_i تكون لذلك مطابقة لمصفوفات السرعة. ومن (66) يترتب أن طاقة تفاعل الذرات ومجال الأشعة يمكن كتابتها في شكل مبسط:

$$-\alpha_i e \phi_i = \frac{e}{c} \dot{q}_i \phi_i. \quad (69)$$

وتكون دالة هاميلتون للنظام الكامل للذرة ومجال الأشعة هي:

$$H_{\text{total system}} = H_{\text{atom}} + \frac{e}{c} \dot{q}_i \phi_i + H_{\text{radiation field}} \quad (70)$$

وانحصرت المسألة في شكل رياضي بسيط بفرض وجود مجال الأشعة في حيز، مما يوفر نظام دوال تعامدية orthogonal لحل معادلات ماكسويل متعرضة لشروط حدود مناسبة. و ϕ_i يمكن بناؤها في هذا النظام، والمعاملات [انظر A (123) و(124)] يمكن كتابتها في الشكل:

$$a_r = e^{-(2\pi i/h)\theta_r} N_r^{1/2},$$

حيث N_r هو عدد كمات الضوء المنتمية للاهتزازة r المعنية. وتكون الطاقة الكلية لمجال الأشعة قبل اعتبار تفاعلها مع الذرة هي:

$$H_{\text{radiation field}} = \sum_r N_r h \nu_r \quad (71)$$

وفي بناء ϕ_i في النظام التعامدي تظل الحدود الفردية معتمدة على مكان الذرة في الحيز. وحيث إن الاعتماد سيوسط حسابياً في النتيجة النهائية عندما يكون الحيز كبيراً بما فيه الكفاية، فمن المناسب إدخال متوسط مربع السعة التي يتم الحصول عليها بأخذ متوسط مربع السعة الحقيقية على كل الأماكن الممكنة للذرة. وينتج عن هذا التعبير لـ ϕ_i :

$$\phi_i = \left(\frac{h}{2\pi c} \right)^{1/2} \sum_r \cos \alpha_{ir} \left(\frac{v_r}{\sigma_r} \right)^{1/2} \cdot \left[N_r^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_r} + e^{-(2\pi i/h)\theta_r} N_r^{1/2} \right]. \quad (72)$$

وهنا α_{ir} تكون الزاوية بين المتجه الكهربائي للاهتزازة r ومحور q_i و σ_r تكون عدد الاهتزازات المميزة في مدى التذبذب Δv_r والزاوية المعتمدة $\Delta \omega_r$ مقسومة على $\Delta v_r \Delta \omega_r$. لذلك، فدالة هاملتون للنظام الكامل تكون:

$$H = H_{\text{atom}} + \sum_r N_r h v_r + \frac{e}{c} \left(\frac{h}{2\pi c} \right)^{1/2} \sum_r \dot{q}_r \left(\frac{v_r}{\sigma_r} \right)^{1/2} \cdot \left[N_r^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_r} + e^{-(2\pi i/h)\theta_r} N_r^{1/2} \right], \quad (73)$$

حيث \dot{q}_r هي مركبة المتجه \mathbf{q} في اتجاه المتجه الكهربائي للاهتزازة المميزة ذات الرتبة r .

ومن المعادلة (73) يمكن استنتاج كل النتائج أعلاه باستخدام قوانين حفظ الطاقة والعزم. لذلك فتوافق H يمكن إثباتها كما في ملحق الكتاب (ص ١١٨ فقرة ١)، ويتبعها أنه لانبعث أو امتصاص كم من الضوء $h\nu_r$ يكون العامل الأساس هو عنصر مصفوفة \dot{q}_r ، المقابلة للانتقال المعنية. وباستثناء معاملات عددية معينة لن تحسب هنا، احتمالية الانتقال المعنية تعطي مباشرة بمربع عنصر المصفوفة هذا. إذا ما أجريت الحسابات (باعتبار حدود التفاعلات كاضطرابات)، ستظهر عمليات الانبعث والامتصاص كأثر ذي رتبة أولى وظواهر التفريق كرتبة ثانية. ولتفاصيل الحسابات، يرجع القارئ إلى أوراق ديراك.

إن صياغة الهاملتونيان لمشكلة الأشعة في المعادلة (73)، لها عيب لأنها لا تتضمن خواص تداخل أو تماسك الأشعة. وهذه هي الحالة عند استخدام متوسط السعات، كما في السابق. وإذا ما ثبتت قيم السعات الصحيحة الناتجة من مفكوك Φ_i بدلالة الدوال المتعامدة، فإن حقيقة أن هذه الدوال هي حلول معادلات ماكسويل تؤكد خواص التداخل وتماسك الأشعة المقابلة لمعادلات ماكسويل. وعلى سبيل المثال فحلول معادلات ماكسويل تظهر كمعاملات للكميات a_r في A (113) وهذه العوامل تختفي عند المكان المحتل بالذرة عندما يختفي هناك متجه الجهد بسبب التداخل. لذلك لن يوجد امتصاص للضوء في المناطق التي طبقاً لنظريات التداخل الكلاسيكية لا يمكن وجود الامتصاص بها. ومن تلك الاعتبارات يتضح أن النظرية الكلاسيكية للموجات كافية لمناقشة كل مسائل التماسك والتداخل.

٥- التداخل وقوانين الحفظ

إنه من الصعب جداً بالنسبة لنا أن نتصور حقيقة أن نظريات الفوتونات لا تتناقض مع متطلبات معادلات ماكسويل. كانت هناك محاولات لتجنب التناقضات وذلك بإيجاد حلول تمثل شعاعاً أحادي الاتجاه (كالإبرة) لكن النتائج لا يمكن تفسيرها بشكل مرضٍ إلى أن وضحت أسس نظرية الكم. وهذه بينت لنا أنه عندما تقدر تجربة ما على تقديم معلومات تخص اتجاه انبعاث فوتون، تكون نتائجها دقيقة مثل تلك المتوقعة من حل معادلات ماكسويل (النوع الإبري، انظر اختصار حزم-الموجة الفصل الثاني فقرة ٢ج).

وكمثال، سنناقش الارتداد بواسطة انبعاث فوتون، افرض أن ذرة ما ذهبت من حالة ساكنة n إلى m مع انبعاث فوتون، وتغير ملائم في عزمها الكلي. وحيث إننا نعنى فقط بخواص التماسك للأشعة المنبعثة، نستخدم طريقة أساس-التقابل، التي تحسب الأشعة كلاسيكياً، وكمصدر للأشعة نأخذ توزيع الشحنة على غرار التعبير المعطى بالنظرية الكلاسيكية لموجات المادة. ويفترض أن الذرة تتكون من إلكترون واحد ذي كتلة μ ، شحنة $-e$ ،

وإحداثيات (Γ_e) ونواة (ذات كتلة M ، وشحنة $+e$ ، وإحداثيات (Γ_n)). وتكون دالة شرودنجر للحالة n ، التي تكون فيها الذرة ذات عزم كلي P هي:

$$e^{(2\pi i/h)P \cdot \Gamma_c} \psi_n(\Gamma_e - \Gamma_n) e^{(2\pi i/h)Et},$$

حيث $\Gamma_c = (\mu\Gamma_e + M\Gamma_n)/(\mu + M)$ هو المتجه إلى مركز ثقل الذرة. وإذا حسب عنصر مصفوفة احتمالية الكثافة المصاحبة للانتقال $n \rightarrow m$ $E - E'$ ، $P - P'$ نحصل على:

$$e^{(2\pi i/h)(P-P') \cdot \Gamma_c} \psi_n(\Gamma_e - \Gamma_n) \psi_m^*(\Gamma_e - \Gamma_n) e^{-(2\pi i/h)(E-E')t}.$$

بأخذ المتوسط بالنسبة لإحداثيات النواة، يمكن الحصول على كثافة شحنة الإلكترون، بأخذ المتوسط بالنسبة لإحداثيات الإلكترون، التي بسبب النواة؛ تكون كثافة الشحنة الكلية هي مجموعها. هذه الكثافة تعتبر مصدرًا ظاهرًا للأشعة المنبعثة، على الأقل مادام يعنى بخواص تماسكها. ومركبتا الكثافة هي [المعامل الشائع e قد حذف، $\Gamma = \Gamma_e - \Gamma_n$ تكون متاح التكامل، dv هو عنصر الحجم، و $\gamma = M/(\mu + M)$]:

$$\rho_e = e^{(2\pi i/h)(P-P') \cdot \Gamma_c} \int e^{(2\pi i/h)\gamma(P-P') \cdot \Gamma} \psi_n \psi_m^* dv \cdot e^{(2\pi i/h)(E-E')t},$$

$$\rho_n = e^{(2\pi i/h)(P-P') \cdot \Gamma_n} \int e^{(2\pi i/h)\gamma(P-P') \cdot \Gamma} \psi_n \psi_m^* dv \cdot e^{(2\pi i/h)(E-E')t}.$$

والكثافة الكلية تكون:

$$\rho = \text{Const. } e^{(2\pi i/h)[(P-P') \cdot \Gamma - (E-E')t]},$$

ولا يهمنا فيها قيمة المقدار الثابت. هذه الكثافات أعطيت بمعادلات مشابهة. والأشعة المنبعثة بهذه الشحنات تحسب من الجهد المتأخر:

$$\Phi_0 = \int \rho (t - R'/c) / R' \cdot dv$$

وهو جهد عددي ومعادلات مشابهة يمكن الحصول عليها للجهود المتجهة Φ_i (R' هي المسافة من نقطة التكامل \mathbf{r} ، إلى نقطة المشاهدة R). والنتيجة هي، لذلك، تكون:

$$\Phi_0 = \text{Const.} \int \frac{\exp(2\pi i/h) [(P - P') \cdot \mathbf{r} - (E - E') (t - R'/c)]}{R'} dv.$$

إذا افترض أن تجربة عينت مكان الذرة بدقة معينة (قيمة العزم P يجب لذلك أن يكون غير يقينية)، لذلك فهذا يعني أن الكثافة ρ قد أعطيت فقط بالمعادلة السابقة في حجم محدد Δv ، وصفر في أي مكان آخر. إذا ما تطلبت الأشعة عند مسافة أبعد من Δv ، يمكن أن تُفك R' بحدود R (إحداثيات نقطة المشاهدة) و \mathbf{r} (إحداثيات نقطة التكامل):

$$R' = R - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{r},$$

حيث $\mathbf{R}_1 = R/R$. الجهد العددي يعطى عندئذٍ بالمعادلة:

$$\Phi_0 = \text{Const.} e^{(2\pi i/h)(t-R/c)} \int (1/R) e^{(2\pi i/h)(P-P'-h\nu\mathbf{R}_1/c) \cdot \mathbf{r}} dv,$$

والتي فيها: $h\nu = E - E'$.

والتكامل مختلف بقدر ملموس عند الصفر فقط في مناطق لها المعامل \mathbf{r} في الأس ذي قيمة مطلقة أقل من مقلوب Δl ، وهي البعد الخطي Δv . وفي كل المناطق الأخرى، تنهدم الأشعة من أجزاء مختلفة من Δv بفعل التداخل. وعليه:

$$P - P' = h\nu\mathbf{R}_1/c \pm h/\Delta l,$$

وترد الذرة بعزم $h\nu\mathbf{R}_1/c$ (فيما عدا عدم اليقين الطبيعي $h/\Delta l$). إذا ما عين الارتداد ببعض الطرق العملية، فتسلك الأشعة المنبعثة سلوكًا مشابهًا لحزمة أحادية الاتجاه. هذه فقط حالة خاصة، على أي حال، والتي تتحقق فقط عندما تعين P ، P' بدقة كافية، وإحداثيات مركز الثقل تكون في المقابل

غير معلومة. الاتجاه الآخر يتحقق عندما تثبت التجربة مكان الذرة بدقة أكثر من $\Delta l = h/|\mathbf{P} - \mathbf{P}'| = c/v$ ، أي أكثر دقة من طول موجي واحد للأشعة المنبعثة ومعادلة Φ_0 تمثل، لذلك، موجة كروية عادية، ولا يمكن استنتاج يخص الارتداد، حيث إن عدم اليقين فيها أكبر من قيمتها المحتملة. هذا المثال يوضح بجلاء كيف تجرد نظرية الكم موجات الضوء ذات الواقعية البدائية كما أرجعتها النظرية الكلاسيكية. والحل الخاص لمعادلة ماكسويل التي تمثل الأشعة المنبعثة، يعتمد على الدقة التي بها تكون إحداثيات مركز كتلة الذرة معروفة.

٦- أثر كمبتون وتجربة كمبتون وسيمون

هناك علاقات مماثلة في نظرية أثر كمبتون، إلا أن الحسابات تكون مماثلة لتلك في الفترة السابقة، وسيعطي هنا ملخصاً للنتائج الأساسية. ومن المثير اعتبار الإلكترونات المرتبطة عن اعتبار الإلكترونات الحرة، لأنه (إذا افترض مكان نواة الذرة الساكنة كما أعطى) توجد معلومات مسبقة معينة تخص مكان الإلكترون المشتت. وتنتج قوانين الحفظ المعادلات:

$$\left. \begin{aligned} hv + E &= hv' + E', \\ \frac{hv}{c} \mathbf{e}_{\pm} \sim \Delta \mathbf{p} &= \frac{hv'}{c} \mathbf{e}' + \mathbf{p}', \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

والحروف غير المعلمة تشير إلى المتغيرات قبل الاصطدام والمعلمة للمتغيرات بعد التصادم؛ \mathbf{p} تكون العزم الخطي للإلكترون، \mathbf{e} ، \mathbf{e}' ، تدل على متجهات الوحدة في اتجاه حركة كم الضوء، $\Delta \mathbf{p}$ تعطي مدى العزم للإلكترون في الذرة. إذا كانت $\Delta \mathbf{p} \sim$ صغيرة بالمقارنة بـ \mathbf{p} و hv/c ، لهذا (74) تمكن من استنتاجات تعنى بالعلاقة بين الاتجاهات \mathbf{e}' و \mathbf{p}' . على سبيل المثال، إذا كانت \mathbf{p}' تقاس في حجرة ويلسون، لهذا فالأشعة سيكون لها كل خصائص إبرة الأشعة، حيث إن اتجاه انبعاث كم الضوء يكون معيناً. إذا كانت $\Delta \mathbf{p} \gg \mathbf{p}'$ ، فإن الدالة الموجية الانتقالية ربما تعتبر كذلك موجة المستوى،

أي، $\exp 2\pi i/h \cdot (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r} - E't)$ ، حيث \mathbf{r} هي المتجه المحدد لمكان الإلكترون. افرض أن الدالة الموجية للحالة غير المضطربة E ، التي يفترض أنها في الحالة العادية تكون $\psi_E(\mathbf{r}) \exp 2\pi i/h \cdot Et$ حيث ψ_E تكون مختلفة عن الصفر في المدى $[\Delta l \cdot \Delta p \sim h]$.

هذه الدوال الموجية تضطرب بالموجات الساقطة ذات التردد ν ، ودالة الاضطراب هي دالة فراغ دورية ذات طول موجي $\lambda = c/\nu$. لذلك، كنتيجة نهائية لتوزيع الشحنة المضطربة يحصل المرء على معادلات في الشكل (75):

$$\left. \begin{aligned} \rho &= c f_E(\mathbf{r}) e^{-(2\pi i/h)Et} e^{(2\pi i/h)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}/\lambda - \nu t)} e^{-(2\pi i/h)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E't)} \\ &= c f_E(\mathbf{r}) e^{2\pi i/h} \left[\left(\frac{h\nu}{c} \mathbf{e} - \mathbf{p}' \right) \cdot \mathbf{r} - (E - E' + h\nu) t \right], \end{aligned} \right\} (75)$$

حيث f_E تختلف عن الصفر فقط في المدى Δl . لذا نحصل على المعادلة (76) إذا ما كتب المرء الجهود المتأخرة لنقطة على بُعد كبير من الذرة:

$$\Phi_0(R) = c e^{-2\pi i\nu'(t-R/c)} \cdot \int_{\text{atom}} \frac{dv'}{R'} f_E(\mathbf{r}') e^{(2\pi i/h)((h\nu/c)\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}' - (h\nu'/c)\mathbf{e}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (76)$$

في هذه المعادلة $h\nu' = E - E' + h\nu$ تكون \mathbf{r}' المتجه إلى نقطة التكامل، و \mathbf{R} إلى نقطة المشاهدة و $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{r}'$. ويبين معامل الزمن في المعادلة (76) أن تردد الأشعة المشتتة هو ν' ويقابل تلك في المعادلة (74). علاوة على ذلك، ويتلاشى المتكامل يمين المعادلة (76) بسبب التداخل، إذا كان معامل \mathbf{r}' مادياً أكبر من مقلوب قطر الذرة. وبناءً عليه، حيث إن: $\Delta l \Delta p \sim h$

$$\frac{h\nu}{c} \mathbf{e} = \frac{h\nu'}{c} \mathbf{e}' + \mathbf{p}' \pm \sim \Delta \mathbf{p}, \quad (77)$$

متفقة مع المعادلة الثانية من (74). وتتصرف الأشعة المشتتة، إذن، طالما اعتبرت خواصها التماسكة مثل سهم الأشعة Radiation needle. وعلى أية حال فإن اتجاه كوانتم الأشعة لا يوصف بدقة، الأمر الذي يمكن اعتباره

كمردود لعدم تعيينية العزم في الحالة الساكنة الأصلية. وعدم التعيينية هذه يمكن أن تتمحي إذا جرب المرء مع إلكترونات ضعيفة الارتباط، لكن عندئذ يكون المقطع الذري في المقابل كبيراً. إذا ما طبق المرء هذه الاعتبارات على حالة ما مثارة، عندئذ $\Delta l \Delta p \sim nh$ تظهر مكان $\Delta l \Delta p \sim h$ ، وعند تقييم الجهد المتأخر يجب أن يأخذ المرء في الحساب عدد النود (nodes - مناطق قيمة الدالة فيها تساوي صفراً) $\psi(r')$. وحيث إن هذا يتضمن تعقيدات غير ضرورية، فسنحصر أنفسنا في الحالة العادية.

إذا أراد المرء أن يشرح تجربة جايجر-بوث Geiger-Bothe على كل من انبعاث وارتداد الإلكترون والفوتون المتشنت في آن واحد، واستخدمت قاعدة التناظر التي ذكرت، هنا يجب أن يتعامل المرء مع توزيعات الشحنة، التي تشع فقط خلال فترة زمنية محددة. وستعطي الحالة الأصلية للإلكترون، بحزمة موجات ساكنة، حجمها يعتمد على ترتيب التجربة. ستمثل الحالة النهائية بحزمة موجية بكر، وكثافة الشحنة، ستعطي بحاصل ضرب دالتين موجيتين، ستكون حينئذٍ مختلفة عن الصفر فقط خلال زمن اقتراب وتغطية كل حزمة للأخرى. والأشعة المنتجة ستكون قطاراً من موجة محددة يتحرك في اتجاه معروف. والتفسير المترتب على تجربة جيجر-بوث، وبالرغم من أنه متكافئ في نقاطه الأساسية، يمكن فقط الحصول عليه من نظرية كم الأشعة. علاوة على أنه في هذه النظرية، فإن قوانين الحفظ التي تنطبق على كمات الضوء والإلكترونات تبقى سارية، لدرجة أن المرء يستطيع، بدون هواجس، استخدام نظرية الكورباسكولار في تجاربه.

٧- ظواهر تقلب الأشعة

متوسط مربع التقلب الكبير، المنتمي لنظرية الكورباسكولار، كان محتوى في الإطار الرياضي لنظرية الكم، كما وضح في ملحق الكتاب. وعلى أية حال، فمن المفيد على وجه الخصوص دراسة العلاقات بين مختلف الصور الفيزيائية التي تؤثر بها نظرية الكم بحساب تقلب مجال إشعاع. افترض وجود تجويف أسود، ذي حجم V ، يحوي أشعة عند حرارة اتزان. متوسط

الطاقة \bar{E} المحتواه في وحدة حجم صغير ΔV في مدى التذبذب بين ν و $\nu + \Delta\nu$ يكون طبقاً لصيغة بلانك Planck:

$$\bar{E} = \frac{8\pi^2 h\nu}{c^3} \frac{\Delta\nu\Delta V}{e^{h\nu/kT} - 1}; \quad (78)$$

حيث k هي ثابت بولتزمان و T هي الحرارة. وطبقاً لقوانين الديناميكا الحرارية العامة، تسري العلاقة الآتية لمتوسط مربع التقلب في E :

$$\overline{\Delta E^2} = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT}.$$

وبالتعويض في المعادلة (78) فقد بين أينشتين أن:

$$\overline{\Delta E^2} = \underbrace{h\nu\bar{E}}_{\text{corpuscle}} + \underbrace{\frac{c^3}{8\pi^2\nu^2\Delta\nu\Delta V}\bar{E}^2}_{\text{wave}}. \quad (79)$$

قيمة متوسط مربع التقلب هذه يمكن جزئياً استنتاجها بواسطة النظرية الكلاسيكية. وجهة نظر نظرية الكورباسكولار تنتج:

$$\bar{E} = h\nu\bar{n}. \quad (80)$$

وأنتجت النظرية الكلاسيكية للجسيم الحد الأول في المعادلة (79). ومن جهة أخرى، أدت بدقة النظرية الكلاسيكية للموجة الجزء الثاني من (79). وحسابات هذه ستعطي لاحقاً بالترابط مع نظرية الكم. لذلك مناسبة نظرية الكم تكون ضرورية لاستنباط المعادلة (79)، والتي فيها لا يهم إذا ما استخدم المرء صورة الموجة أو الكورباسكولار.

وعلى وجه الخصوص، إذا عولجت المسألة بواسطة الفراغ الشكلي للجسيمات (بالرغم من هذا لم يتم عمله لكمات الضوء بتفصيل)، فإن المرء يجب ملاحظة أن كل حدود نظام المسألة يمكن تقسيمه إلى أنظمة جزيئية غير مجمعة، ومنها يمكن اختيار واحدة محددة كحل. وبسبب علاقات التبادل (84)، التي تصبح ظاهرة من علاقات عدم اليقين المقابلة، فإن نظام

الحد يجب أخذه ذي دوال مميزة تكون متماثلة في إحداثيات كمات الضوء. هذا الاختيار يؤدي إلى إحصاء بوز Bose لكمات الضوء وأيضاً كما وضع بوز،^١ للمعادلة (78).

إذا استخدمت صورة الموجة، فسيحصل المرء على عدد كمات الضوء المقابلة للاهتزازة المعنية من ساعات الاهتزازات المعنية، ولذلك نفس النمط الرياضي. ولتجنب المشكلات غير الضرورية في الحسابات، دعنا نعالج اهتزاز وتر ذي طول l بدلاً من فجوة الإشعاع الأسود.

افرض أن $\varphi(x, t)$ تكون الإزاحة الطرفية، c هي سرعة الضوء في وتر تصبح دالة لاجرانج Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (81)$$

وعليه (A فقرة ٩):

$$\Pi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (82)$$

و

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ c^2 \Pi^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx. \quad (83)$$

وتستخدم علاقات التبادل الآتية:

$$\Pi(x) \varphi(x') - \varphi(x') \Pi(x) = \delta(x - x') \frac{\hbar}{2\pi i}. \quad (84)$$

بإدخال

$$\varphi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_k q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

\bar{H} تعطى بالمعادلة (85)

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_k^2 + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k^2 \right\}. \quad (85)$$

وبإدخال العزوم المصاحبة لـ q_k

$$p_k = \frac{1}{c^2} \dot{q}_k, \quad (86)$$

تصبح معادلة (84)

$$p_k q_l - q_l p_k = \delta_{kl} \frac{h}{2\pi i} \quad (87)$$

أو

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \sqrt{\frac{k\pi}{l}} \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \left\{ N_k^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_k} + e^{-(2\pi i/h)\theta_k} N_k^{1/2} \right\} \\ q_k &= \sqrt{\frac{k\pi}{l}} \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \left\{ N_k^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_k} - e^{-(2\pi i/h)\theta_k} N_k^{1/2} \right\} \frac{1}{i}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

والترددات المميزة للوتر تكون $\nu_k = k(c/2l)$ ، وعليه:

$$\bar{H} = \sum_k h\nu_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right). \quad (89)$$

والطاقة في مقطع صغير $(0, a)$ من السلك، يحصل المرء على:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = \frac{1}{l} \int_0^a \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_j \dot{q}_k \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right. \\ \left. + q_j q_k jk \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{j\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \right\} dx. \end{aligned} \quad (90)$$

وإذا خص حدود هذا المجموع في حالة $j = k$ ، فإنه تحت فروض حصرية بأن أطوال الموجات المعنية تكون صغيرة بالنسبة a ، يحصل المرء على القيمة

$$\bar{\mathbb{E}} = \frac{a}{l} \bar{H}.$$

ويجد لذلك المرء التقلب $\Delta \mathbb{E} = \mathbb{E} - \bar{\mathbb{E}}$ بإهمال الحدود عند $j = k$ في (90). وينتج التكامل:

$$\Delta \mathbb{E} = \frac{1}{2l} \sum_{j \neq k} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_j \dot{q}_k K_{jk} + jk \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a_j a_k K'_{jk} \right\}, \quad (91)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} K_{jk} &= c \frac{\sin(v_j - v_k) a/c}{v_j - v_k} - c \frac{\sin(v_j + v_k) a/c}{v_j + v_k}, \\ K'_{jk} &= c \frac{\sin(v_j - v_k) a/c}{v_j - v_k} + c \frac{\sin(v_j + v_k) a/c}{v_j + v_k}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

وعليه، يعطى متوسط مربع التقلب بالمعادلة:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbb{E}^2} &= \frac{1}{2l^2} \sum_{j \neq k} \left\{ \frac{1}{c^4} \overline{\dot{q}_j^2 \dot{q}_k^2} K_{jk}^2 + j^2 k^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \overline{a_j^2 a_k^2} K'_{jk} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{jk}{c^2} (\overline{a_j \dot{q}_j a_k \dot{q}_k} + \overline{\dot{q}_j a_j \dot{q}_k a_k}) K_{jk} K'_{jk} \right\}. \end{aligned}$$

والجمع بالنسبة إلى j و k يمكن استبداله وأخذ تكامل بالنسبة للتذبذبات v_j و v_k على الترتيب، إذا ما افترض أن الوتر l طويل جداً إلى درجة أن ذبذباته المميزة تكون قريبة بعضها من بعض. بالإضافة إلى ذلك يفرض المرء أن a تكون كبيرة ويستخدم العلاقة:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-v_1}^{v_2} \frac{\sin^2 va}{v^2} f(v) dv = \pi f(0) \quad (93)$$

إذا كانت $v_1 > 0$ ، $v_2 > 0$. والتكامل الثنائي يصبح تكاملاً بسيطاً ويجد المرء أن:

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{a}{c} \int dv \left\{ \frac{1}{c^4} (\overline{\dot{q}_v^2})^2 + \left[\left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \overline{q_v^2} \right]^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \left[(\overline{q_v \dot{q}_v})^2 + (\overline{\dot{q}_v q_v})^2 \right] \right\}. \quad (94)$$

ويسبب علاقات التبادل (84)،

$$\overline{q_v \dot{q}_v} = -\overline{\dot{q}_v q_v} = c^2 \frac{h}{4\pi i}, \quad (95)$$

ولهذا:

$$\overline{E} = \frac{a}{l} \int dv Z_v h\nu \left(N_v + \frac{1}{2} \right), \quad (96)$$

حيث $Z_v dv$ تدل على عدد الذبذبات المميزة في المدى dv ، أو في حالة $Z_v = 2l/c$ إذا أخذ التكامل بالنسبة لمدى الذبذبة $\Delta\nu$ ، يحصل المرء على

$$\overline{E} = \frac{a}{l} Z_v \Delta\nu h\nu \left(N_v + \frac{1}{2} \right), \quad (97)$$

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{a}{c} \Delta\nu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{E}_c}{a\Delta\nu} \right)^2 - \frac{1}{2} (h\nu)^2 \right]. \quad (98)$$

ويقسم المرء عندئذ \overline{E} إلى طاقة حرارة \overline{E}^* وطاقة نقطة الصفر:

$$\overline{E} = \overline{E}^* + \frac{a}{l} Z_v \Delta\nu \frac{h\nu}{2} = \overline{E}^* + a\Delta\nu h\nu,$$

ويجد:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta E^2} &= \frac{a}{2c} \Delta\nu \left[\left(\frac{\overline{E}^* c}{a\Delta\nu} \right)^2 + 2 \frac{\overline{E}^* c}{a\Delta\nu} h\nu \right] \\ &= h\nu \overline{E}^* + \frac{\overline{E}^{*2}}{\Delta\nu} Z_v \frac{a}{l}. \end{aligned} \quad (99)$$

هذه القيمة تقابل بالضبط الصيغة (79). العلاقة المقابلة في النظرية الموجية الكلاسيكية يمكن الحصول عليها بالوصول إلى النهاية $h = 0$ في (99). وتقود النظرية الموجية الكلاسيكية نقطة إلى الحد الثاني في المعادلة (99). نظرية الكم، التي يمكن للمرء تفسيرها حسب ما يناسب؛ إما كنظرية الجسيم أو كنظرية الموجة، تؤدي إلى الصيغة الكاملة للتقلب.

٨- الصياغة النسبية لنظرية الكم

أهملت في كل المناقشات السابقة، الشروط الموضوعية على كل النظريات الفيزيائية بأسس النسبية، وعليه فالنتائج التي تم الحصول عليها تطبق فقط تحت تلك الشروط التي فيها تعتبر سرعة الضوء غير محدودة. وسبب هذا الإهمال هو أن كل الآثار النسبية تنتمي إلى تيرا إنكوجنيتا Terra Incognita الأرض المجهولة لنظرية الكم؛ الأسس الفيزيائية التي وضحت في هذا الكتاب والتي يجب أن تصلح في هذه المنطقة أيضاً ولذلك يكون مناسباً عدم حجبها بأسئلة لا يمكن الإجابة عنها قطعياً في الوقت الحالي. على أية حال، سيكون الكتاب غير كامل بدون مناقشة مختصرة لكل المحاولات لبناء نظريات تشمل أو تحوي كل الفئات الأساسية، والصعاب التي ظهرت خلال هذه المحاولات.

وضع ديراك^{١١} معادلة الموجة الصالحة للإلكترون واحد وغير متغيرة تحت تحويلات لورنتس. وهي تحقق كل متطلبات نظرية الكم، وقادرة على إعطاء بيان تليفي لظواهر الحركة المغزلية للإلكترون، والتي كانت تعالج من قبل كفروض مخصصة ad hoc. الصعوبة الأساسية التي نشأت مع كل نظريات الكم النسبية لم يتم إزالتها على أي حال. وهذا نشأ من العلاقة:

$$\frac{1}{c^2}E^2 = \mu^2c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (100)$$

بين الطاقة والعزم للإلكترون الحر. وطبقاً لهذه المعادلة توجد قيمتان للطاقة E تختلف في الإشارة المصاحبة لكل فئة قيم p_x, p_y, p_z وتستطيع

النظرية الكلاسيكية حذف هذا بإبعاد علامة اختياريًا، لكن هذا غير ممكن طبقًا لأساسيات نظرية الكم. وهنا قد تحدث انتقالات تلقائية لحالات ذات طاقة سالبة؛ وحيث إن تلك لم تشاهد على الإطلاق، تكون النظرية خاطئة بكل تأكيد. وتحت هذه الشروط يكون ملاحظًا جدًا أن مستويات الطاقة الموجبة (على الأقل في حالة إلكترون واحد) تنطبق مع ما شوهد فعليًا. الصعوبة الملاصقة للمعادلة (100) بينت أيضًا بحسابات كلاين O. Klein^{١٢}، الذي أثبت إذا حكم الإلكترون بأي معادلة تعتمد على هذه العلاقة فسيكون قادرًا على المرور بدون عوائق خلال مناطق تكون طاقة جهدها أكبر من $2mc^2$. إذا اعتبرت فقط الحركة في اتجاه x فإن المعادلتين (31a) و(31c) تصبحان:

$$\frac{E^2}{c^2} = \mu^2 c^2 + p_x^2,$$

$$\frac{(E - V)^2}{c^2} = \mu^2 c^2 + p_x'^2$$

حيث:

$$p_x'^2 = p_x^2 + \frac{(E - v)^2 - E^2}{c^2},$$

بينما تكون دالة الموجة لها الشكل:

$$e^{(2\pi i/h)(p_x'x - Et)}$$

لكل قيمة صغيرة V و p_x' تكون حقيقية ويكون موجودًا موجات نافذة، بالضبط كما في الفصل ٢ فقرة ٢ف. وللقيم الأكبر، تصبح p_x' تخيلية، لذلك تنعكس الموجة عند نقطة عدم الاتصال وتقل أسياً في منطقة II. لكن لقيمة كبيرة جدًا لـ V و p_x' تصبح مرة أخرى حقيقية، أي أن موجة الإلكترون تنفذ مرة أخرى إلى المنطقة II بسعة ثابتة. ومزيد من الحسابات الدقيقة يثبت هذه النتيجة.

ونشأت صعوبة ذات طبيعة مختلفة إلى درجة ما عند حساب طاقة مجال الإلكترون طبقاً للنظرية النسبية. لإلكترون نقطة (إلكترون ذي نصف قطر صفر) حتى النظرية الكلاسيكية تعطي قيمة غير محددة للطاقة، كما هو معروف جيداً لذلك يصبح ضرورياً أن نقدم ثابتاً علمياً لأبعاد الطول — «نصف قطر الإلكترون». ويلاحظ أن: في النظرية غير النسبية يمكن تجنب هذه الصعوبة بطريقة أخرى — بالاختيار المناسب لرتبة العوامل غير الاندماجية في دوال هاميلتون. وهذا لا يكون ممكناً — من الآن فصاعداً في نظرية الكم النسبية.

والأمل معقود على أنه بعد حل هذه المشكلات سينظر على أن نظرية الكم قد أسست، بمقياس كبير على الأقل، على المفاهيم الكلاسيكية. لكن المسح السطحي لاتجاه تطور ونشوء الفيزياء في الأعوام الثلاثين الماضية بين أن الحل إلى حد بعيد سينتج مزيداً من القيود على تطبيق المفاهيم الكلاسيكية أكثر من إزالة ما تم اكتشافه. وقائمة التغيرات والقيود لعالمنا المثالي — الذي يحتوي الآن على ما تتطلبه نظرية النسبية (والمميزة لها c) وعلاقات عدم اليقين (يرمز لها بثابت بلانك h) — ستمتد بالآخرين المقابلين مثل M ، μ ، e . لكن طابع هذه لم يتوقع بعد.

الفصل السادس

الملحق

الجهاز الرياضي لنظرية الكم

يوجد مصدران متاحان لاشتقاق المخطط الرياضي لنظرية الكم وهما: الحقائق الوضعية، ومبدأ التناظر بصرف النظر عن كون نظرية الكم تؤسس على صورة الموجة أو الجسيم. مبدأ التناظر الذي يرجع إلى بور^١ يفترض تشابهاً مفصلاً بين نظرية الكم والنظرية الكلاسيكية المناسبة للصورة العقلية المستخدمة. هذا التشابه لا يستخدم فقط كمرشد لاكتشاف صيغة القوانين، لكن قيمته الخاصة أنه يوفر تفسيراً للقوانين الموجودة باستخدام الصورة الفعلية المستعملة.

نبدأ باشتقاق الهيكل الرياضي لميكانيكا الكم من الجسيمات المناظرة.^٢

١- مفهوم الجسيمات للمادة

المعادلات الأساسية للميكانيكا الكلاسيكية لنظام له f درجة من الحرية يمكن كتابتها بما يسمى الصيغة القانونية:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k = (1, 2, 3, \dots, f), \quad (1)$$

حيث q_1, q_2, \dots, q_f هي الإحداثيات العامة، p_1, p_2, \dots, p_f هي كمية الحركة المرافقة، وحيث H هي دالة هاميلتون. عندما لا تعتمد H بصراحة

على الزمن فإن معادلة الطاقة هي:

$$H(p, q) = W, \quad (2)$$

حيث W (الطاقة الكلية) مقدار ثابت، ينتج بسهولة، للتبسيط يمكن افتراض أن النظام متعدد الدورية، وفي هذه الحالة فإن أي إحداثي q_k كدالة في الزمن يمكن كتابته كمتسلسلة فوريير أي كمجموع لحدود توافقية على الشكل:

$$q_k = \sum_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{\tau_f=-\infty}^{+\infty} a_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_f}^{(k)} e^{2\pi i(\tau_1 \nu_1 + \tau_2 \nu_2 + \dots + \tau_f \nu_f)t}. \quad (3)$$

حيث $q_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_f}^{(k)}$ هي الساعات لا تعتمد على الزمن وحيث $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_f$ هي الترددات الأساسية للحركة. تعبيرات مماثلة تحتوي نفس الترددات يمكن كتابتها لـ p_k وعمومًا لأي دالة في p_k و q_k .

بالتحويل القانوني: أي التحويل الذي لا يغير صيغة المعادلة (1) من الممكن تقديم مجموعة جديدة من المرافقات القانونية J_k, w_k تعرف بأنها «متغيرات زاوية الفعل». هذه تعرف أساسًا بالخواص التالية: الدالة الهاميلتونية H تعتمد فقط على J_k, w_k وترتبط بالترددات الأساسية للحركة بمعادلات على الصورة:

$$w_k = \nu_k t + \beta_k$$

حيث β_k ثوابت. باستخدام هذه المتغيرات تصبح معادلات الحركة على الصورة:

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial H}{\partial w_k}, \quad \dot{w}_k = \nu_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, f). \quad (4)$$

وفقًا للنظرية الكلاسيكية للإلكتروديناميك الترددات لخطوط الطيف المنبعثة من الذرة هي ترددات الحدود التوافقية في معادلة (3) وأن الساعات سوف تحدد الشدة المقابلة.

وفقاً لمبدأ التناظر يجب أن تكون هناك علاقة وثيقة بين ميكانيكا الجسيمات الكلاسيكية على النحو المبين سابقاً وبين ميكانيكا نظرية الكم. بالنسبة للأخيرة علينا البحث عن مجموعة معادلات مشابهة في الصياغة لمعادلات النظرية الكلاسيكية لكن نأخذ أيضاً في الاعتبار بعض الحقائق التجريبية الراسخة للفيزياء الذرية. من بين هذه العوامل الأولية ما يلي:

(١) مبدأ جمع ريدبرج-ريتز

الترددات الطيفية المرصودة للذرة تمتلك خاصية الحد الهيكلي. أي أن كل الخطوط الطيفية للعنصر يمكن تمثيلها كفروق لعدد صغير نسبياً من الحدود. إذا رتبنا هذه الحدود في تنظيم أحادي البعد T_1, T_2, \dots . الترددات الذرية تكون تنظيم ثنائي البعد:

$$\nu(nm) = T_n - T_m, \quad (5)$$

ومنها ينتج بسهولة مبدأ الجمع:

$$\nu(nk) + \nu(km) = \nu(nm). \quad (6)$$

(٢) وجود قيم منفصلة للطاقة

التجارب الأساسية لفرانك وهرتز عن التأثير الإلكتروني أوضحت أن طاقة الذرة تأخذ فقط قيماً معينة ومحددة ومنفصلة، W_1, W_2, \dots .

(٣) علاقة Bohr الترددية

الترددات المميزة للذرة ترتبط بطاقتها المميزة بالمعادلة:

$$\nu(nm) = \frac{1}{h}(W_n - W_m). \quad (7)$$

ننتقل الآن إلى مخطط استنتاج المعادلات الأساسية لميكانيكا الكم الجديدة متتبعين البرنامج المبين سابقاً. ينبغي أن يفهم بوضوح، مع ذلك،

أن هذا لا يمكن استنتاجه بالمعنى الرياضي للكلمة، لأن المعادلات الناتجة تشكل بنفسها مسلمات النظرية. برغم التقدم المعقول للغاية للاعتبارات التالية، ففي نهاية المطاف يكمن تبرير الاتفاق لاستنتاجهم تجريبياً. التعديلات العميقة، ليس فقط للديناميكا الكلاسيكية ولكن أيضاً الكلاسيكية الكينماتيكية يكون بالضرورة واضحاً إذا كانت الحقائق التجريبية البسيطة التي ذكرت سابقاً ينبغي إدراجها في أسس النظرية الجديدة. في النظرية الكلاسيكية كل التحركات الممكنة للإحداثيات يمكن بناؤها بإضافة حدود فورير من النوع المذكور في معادلة (3) وهذه يمكن تسميتها «العناصر الكينماتيكية» لأن المقادير التي تتعامل معها النظرية وبالأخص الطاقة يمكن التعبير عنها بواسطة هذه الحدود. هذه السعات والترددات هي دوال في متغيرات ثابت التكامل المتصلة وفي الأعداد الصحيحة $T_1 \dots T_f$ التي تعين درجة التوافقيات. هذا به تناقض لوجود قيم منفصلة فقط للطاقات وترددات الذرة، في الحقيقة، تناقض لوجود خطوط الطيف المعرفة بوضوح.

عناصر مشابهة يجب افتراضها في ميكانيكا الكم إذا لزم الحفاظ على التناظر بين النظريتين. لتأكيد وجود قيم منفصلة للطاقة عند البداية، العناصر سنأخذها دوال في أعداد صحيحة. بالتناظر مع مبدأ ريدبرج-ريتز للتوافق، يطلب الاعتماد على مجموعتين من الأعداد الصحيحة، في حين أن طبيعة الطيات Folding من رتبة f للتوافقيات الكلاسيكية تقترح أن كل مجموعة تحتوي f من الأعداد الصحيحة. ومن ثم نفترض عناصر على الصورة:

$$q(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f) e^{2\pi i v(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f)t} \quad (8)$$

وفيهما التركيبات $n_1 \dots n_f$ و $m_1 \dots m_f$ بدلاً من الأعداد الصحيحة الوحيدة n, m بطريقة سهلة الفهم. علاوة على ذلك، السعات والترددات يفترض أنها مباشرة أعطيت من التحليل الطيفي المنبعث من الإشعاع، أي أن النظرية الجديدة يمكن وصفها كحساب لكميات ملحوظة. الترددات

لذلك فإنها تتبع مبدأ التوافق (6). لهذا يفترض أن لها حدود هيكلية (5) وطبقاً

لا يوجد بوضوح سؤال عن الإضافة لهذه العناصر لتشكل متسلسلة فورير كما في النظرية الكلاسيكية، ومع ذلك، يجب وجود تشابه للتمثيل في الإحداثيات بهذه المتسلسلة. الطريقة العامة والمرنة المتاحة هي بأخذ مجموعة العناصر على الشكل (8) هو الكيان الذي يصور الجسيمات في نظرية الكم بدلاً من التمثيل الرياضي الكلاسيكي للإحداثيات المعطاة في المعادلة (3) المجموعة يمكن كتابتها على صورة مصفوفة:

$$\left\| q \left(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f \right) e^{2\pi i v(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f) t} \right\|,$$

أي أنه تنظيم مربع لا نهائي مرتب تبعاً للأعداد الصحيحة n_i, m_i التي تأخذ جميع القيم الحقيقية. الكينماتيكا الجديدة تعتمد من ثم على تمثيل مصفوفة الإحداثيات بالعلاقة:

$$q_k = \left\| q_k(nm) e^{2\pi i v(nm)t} \right\| \quad (9)$$

لكل q_k . وهنا الأعداد $n_1 \dots n_f$ و $m_1 \dots m_f$ سوف تستبدل على العموم بالأعداد m, n . بالنسبة لكمية الحركة (العزوم) p_k فيفترض تمثيل للمصفوفة مشابه وله نفس الترددات كما في حالة متسلسلة فورير الكلاسيكية. ومع ذلك فإن هذا التمثيل ليس له معنى رياضياً وفيزيائياً حتى نعرف قوانين وخواص العمليات للمصفوفات. مبدأ التناظر يظل دليلاً هنا. في المكان الأول التعبير الكلاسيكي (3) يجب أن يكون له قيمة حقيقية، ولأن الحدود هي أعداد مركبة فتكون تلك هي الحالة فقط إذا كان لكل حد يوجد الحد المرافق له. هذا سيكون أيضاً صحيحاً لعناصر المصفوفة (9) إذا فرضنا:

$$q_k(mn) = q_k^*(nm),$$

وذلك لأن (6) تعطي $v(mn) = -v(nm)$ حيث * ترمز للمرافق التخيلي. المصفوفات من هذا النوع للتماثل تسمى هيرميتيان Hermitian وفي نظرية الكم كل مصفوفات الإحداثيات يفترض أنها من هذا النوع. المشتقة بالنسبة للزمن لأي إحداثي q_k تمثل كلاسيكياً بمسلسلة فورير حيث حدودها هي المشتقات بالنسبة للزمن للحدود في المتسلسلة التي تمثل q_k . ومن ثم فإن مصفوفات نظرية الكم.

$$\dot{q} \equiv \left\| \left\| 2\pi i v(nm) q(nm) e^{2\pi i v(nm)t} \right\| \right\|, \quad (10)$$

ومرة أخرى هي مصفوفة هيرميتية (Hermitian) بشكل (9). يجب أن يكون من الممكن في نظرية الكم الإجابة عن الأسئلة المبدئية الحركية Kinematical بالطريقة التالية: إذا أعطينا مصفوفات تمثل مثلاً كمية الحركة p ، والإحداثي q فما هي المصفوفات التي تمثل $p + q$ ، وعموماً أي دالة في p و q ؟ في حالة الجمع فإن الإجابة واضحة من المقابل الكلاسيكي. لأن مجموع متسلسلتين لفورير من الشكل (3) هو متسلسلة من نفس النوع ولها نفس الترددات لكن السعات هي مجموع مركبات السعات، فنتوقع لعناصر مصفوفات نظرية الكم

$$(p + q)(nm) \equiv \left\| \left\| [p(nm) + q(nm)] e^{2\pi i v(nm)t} \right\| \right\|.$$

قانون الضرب يعرف باعتبارات مشابهة حيث الفرق المميز من الضرب الكلاسيكي يرجع إلى حقيقة أن ترددات الكم تتبع مبدأ توافقيات ريدبرج-ريتز. حاصل ضرب متسلسلتين لفورير في النظرية الكلاسيكية يمكن كتابته على شكل مجموع مزدوج:

$$pq = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} p_{\sigma} q_{\sigma'} e^{2\pi i[(\sigma + \sigma')v]t},$$

حيث σ بدلاً من التركيبية $\sigma_1 \dots \sigma_f$ و $(\sigma + \sigma')v$ بدلاً من $(\sigma_1 + \sigma'_1)v_1 + \dots + (\sigma_f + \sigma'_f)v_f$ لكتابة ذلك على صورة حدود المعادلة

(3) التي لها نفس التردد والتي يجب جمعها، أي تلك الحدود، حيث $\sigma + \sigma' = \tau$ تعطي

$$pq = \sum_{\tau} (pq)_{\tau} e^{2\pi i[\tau v]t},$$

حيث:

$$(pq)_{\tau} = \sum_{\sigma} p_{\sigma} q_{\tau-\sigma}. \quad (11)$$

في نظرية الكم المصفوفة التي تمثل pq يجب أن تكون تجمعاً مكوناً من الحدود $p(nm)e^{2\pi i v(nm)t}$ و $q(nm)e^{2\pi i v(nm)t}$. المصفوفة من النوع (9) تحصل عليها إذا جمعت العناصر التي لها نفس التردد، أي الحدود التي لها $v(nk) + v(km) = v(nm)$ من مبدأ التوافق (6). السعة الجديدة لهذا هي:

$$pq(nm) = \sum_k p(nk) q(km), \quad (12)$$

والعناصر تصبح: $pq(nm)e^{2\pi i v(nm)t}$

هذا هو القانون الرياضي المعروف لضرب المصفوفات أو الممتدات tensors. وتحقق استخدام هذه الحدود هنا. كما يلاحظ من معادلة (12) $pq(nm) \neq qp(nm)$ ومن ثم فإن عملية الضرب في نظرية الكم ليست تبادلية وهي نتيجة هامة جداً لمواصلة التطوير.

باستخدام قواعد الجمع والضرب يمكن إعطاء معنى لأي دالة $x(p, q)$ في مصفوفات الإحداثيات وكمية الحركة. مادامت الدالة كمتسلسلة قوى. عناصر الدالة x تكون دائماً على الشكل $x(nm)e^{2\pi i v(nm)t}$ وأن مصفوفة الترددات $v(nm)$ ستكون دائماً نفسها لأي نظام ذري. من ثم فالمصفوفة تمثل تمثيلاً جيداً بسعتها $x(nm)$ فقط والحدود الأسية مفهومة.

التعاريف المعتادة والمفاهيم لنظرية المصفوفات تم تبنيها في نظرية الكم. تساوي مصفوفتين تعني تساوي العناصر المتناظرة. مصفوفة الوحدة

تعرف بأنها المصفوفة حيث العناصر القطرية هي الواحد وباقي العناصر غير القطرية صفرية. ويرمز لذلك:

$$1 \equiv \|\delta_{nm}\|,$$

حيث

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{when } n = m, \\ 0 & \text{when } n \neq m. \end{cases}$$

المعكوس x^{-1} للمصفوفة x هو المصفوفة التي تحقق المعادلات:

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1.$$

المدود \bar{x} للمصفوفة x هو المصفوفة $\|x(mn)\|$ ونحصل عليها بإبدال الصفوف بالأعمدة للمصفوفة x .

نحن الآن في محيط عناصر الجبر الكمي حيث رأينا بسهولة أن جميع قواعد الجبر العادية لا تزال صالحة باستثناء قانون التبادل. فإذا كانت x, y, z تمثل أي دوال للمتغيرات الديناميكية المطاعة في نظرية الكم فقواعد جبر المصفوفة:

$$x + y = y + x,$$

$$x(y + z) = xy + xz,$$

$$x(yz) = (xy)z,$$

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

لكن بصفة عامة فإن:

$$xy \neq yx.$$

وحتى هذه اللحظة لم يقدم ثابت بلانك h الذي يلعب دورًا أساسيًا في النظرية ظهور هذا الثابت وثيق الصلة بأن المتغيرات ليست تبادلية وتشكل تعارضًا شديدًا للنظرية الكلاسيكية. في الحقيقة وجد بواسطة Dirac² أن التعبير $(2\pi i/h)(xy - yx)$ في نظرية الكم يشابه تعبيرًا على الشكل:

$$[xy] = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial p_k} - \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial p_k} \right)$$

في الميكانيكا الكلاسيكية، عدم تغيير هذا التعبير بالنسبة للتحويلات القانونية بالنسبة إلى q_k و p_k معروف تمامًا. حتى يمكن جعل هذه الصلة مقنعة سوف يثبت أن في نهاية المنطقة حيث الأعداد الصحيحة m, n كبيرة بالمقارنة بالفرق بينهما هناك اتفاق تقاربي بين عناصر المصفوفة $(2\pi i/h)(xy - yx)$ والعناصر التوافقية لتعبير القوس الكلاسيكي $[xy]$. أنه من الضروري أولاً النص بدقة أكثر على الصلة بين عناصر المصفوفة وسعات فورير.

يجب أن نذكر أنه في نظرية الحالات الثابتة التي تشكلت في مرحلة مبكرة من تطوير ميكانيكا الكم الحالية، وجود قيم غير متصلة فقط للطاقة تم الحصول عليها من خلال تحديد ثوابت الحركة الكلاسيكية. إذا تم تعريف هذه خلال فراغ الحركات الممكنة بواسطة المعادلات:

$$J_k = n_k h \quad (k = 1, 2, \dots, f), \quad (13)$$

حيث J_k هي تأثير المتغيرات وأن n_k أعداد صحيحة، فإن شرط تردد Bohr (7) يظهر مشابهاً للعلاقة الكلاسيكية:

$$v_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}.$$

ولأن H دالة في العدد n_k فقط بواسطة المعادلات (4) فإن $\partial H / \partial J_k$ يمكن كتابتها:

$$\frac{\partial H}{\partial J_k} = \lim_{\alpha_k \neq 0} \frac{H(n_1 \dots n_f) - H(n_1 \dots n_k - \alpha_k, \dots, n_f)}{\alpha_k h},$$

وفي حدود المنطقة حيث n_k كبيرة جداً مقارنة بالقيمة α_k

$$\begin{aligned} & \nu(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f) \\ &= \frac{1}{h} [H(n_1 \dots n_f) - H(n_1 - \alpha_1, \dots, n_f - \alpha_f)] \\ &\sim \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial n_1} + \dots + \alpha_f \frac{\partial H}{\partial n_f} \\ &= \alpha_1 \nu_1 + \dots + \alpha_f \nu_f. \end{aligned}$$

ولذلك يوجد اتفاق تقاربي في هذه المنطقة التي يمكن الإشارة إليها باختصار بأنها أعداد الكم الكبيرة، بين طيف التردد $\nu(n_1 \dots n_f; m_1 \dots m_f)$ والتوافق. $(n_1 - m_1)\nu_1 + \dots + (n_f - m_f)\nu_f$. في النصوص الثابتة $(n_1 \dots n_f)$ أو $(m_1 \dots m_f)$ لأن العناصر التوافقية في مصفوفة ميكانيكا الكم تمثل خطوط الطيف فيقترح هذا إحداثيات عامة بين عنصر المصفوفة: $q(n_1 \dots n_f; n_1 - \alpha_1, \dots, n_f - \alpha_f) e^{2\pi i \nu(n_1 \dots n_f; n_1 - \alpha_1 \dots n_f - \alpha_f) t}$ والتوفيق $(\alpha_1 \dots \alpha_f)$ في النص الثابت $(n_1 \dots n_f)$. باختصار أكثر:

$$q(n, n - \alpha) e^{2\pi i \nu(n, n - \alpha) t} \text{ corresponds to } q_\alpha(n) e^{2\pi i [\alpha \nu] t} \quad (14)$$

في منطقة أعداد الكم الكبيرة. هذا التنسيق هو مزيد من التبرير بالموافقة التقريبية الموجودة تجريبياً في هذا النطاق بين الشدة المحسوبة تقليدياً من سعة فوريير $q_\alpha(n)$ في الحالات الثابتة وشدة الخيوط الطيفية $\nu(n, n - \alpha)$. المؤشرات n, m لعناصر المصفوفة تقابل أعداد الكم للحالتين الثابتتين. بينما عناصر القطر $(n = m)$ تقابل الحالات الثابتة نفسها.

بمساعدة التنسيق (14) التناظر السابق ذكره مع أقواس Poisson تم إيضاحه. العنصر (nm) من $(2\pi i/h)(xy - yx)$ يمكن كتابته كمجموع على α و β من الحدود بالشكل:

$$\begin{aligned} & (2\pi i/h) \{x(n, n - \alpha)y(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \\ & - y(n, n - \beta)x(n - \beta, n - \alpha - \beta)\}, \end{aligned}$$

حيث $\alpha + \beta = n - m$ بجمع وطرح المقدار

$$x(n - \beta, n - \alpha - \beta)y(n - \alpha, n - \alpha - \beta).$$

يصبح:

$$\left(\frac{2\pi i}{h}\right) \{ [x(n, n - \alpha) - x(n - \beta, n - \alpha - \beta)] \\ \cdot y(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \\ - [y(n, n - \beta) - y(n - \alpha, n - \alpha - \beta)] \\ \cdot x(n - \beta, n - \alpha - \beta) \}.$$

الآن في نطاق «أعداد الكم الكبيرة» حيث $\alpha, \beta \ll n$

$$x(n, n - \alpha) - x(n - \beta, n - \alpha - \beta) \sim h\beta \frac{\partial x_\alpha(n)}{\partial J},$$

و

$$y(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \sim \frac{1}{2\pi i\beta} \frac{\partial y_\beta(n - \alpha)}{\partial w} \sim \frac{1}{2\pi i\beta} \frac{\partial y_\beta(n)}{\partial w}$$

لأن هذه التوافقيات لـ y على الشكل $y_\beta(n)e^{2\pi i\beta w}$ من معادلات (4). من ثم عناصر المصفوفة السابقة هي تقريباً*:

$$\sum_{\alpha+\beta=n-m} \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial x_\alpha(n)}{\partial J_k} \frac{\partial y_\beta(n)}{\partial w_k} - \frac{\partial y_\beta(n)}{\partial J_k} \frac{\partial x_\alpha(n)}{\partial w_k} \right],$$

وباستخدام قانون (12) لضرب ساعات فوريير هو التوافق $(n - m)$ للمتغير $[xy]$ معبراً عنه بحدود زاوية العمل للمتغيرات.

* الجمع يمتد بالضرورة إلى منطقة حيث أعداد الكم ليست كبيرة بالمقارنة للفرق بينهم ومن ثم بالنسبة للتوافق العددي عناصر المصفوفة تتحرك بعيداً عن القطر يجب إهمالها، لأنها تناظر لتوافقيات عالية في النظرية التقليدية. التوافق الشكلي الذي هو أعظم أهمية هنا: من المؤكد أنه لا يتأثر.

في النظرية الكلاسيكية أقواس Poisson للصيغ المرافقة للمتغيرات p_k و q_k تحقق العلاقات:

$$[p_k q_l] = \begin{cases} 1 & \text{when } k = l \\ 0 & \text{when } k \neq l \end{cases}, \quad [p_k, p_l] = 0, \quad [q_k, q_l] = 0.$$

العلاقات المشابهة سوف نفرضها للمتغيرات المرافقة في نظرية الكم، أي أن:

$$\left. \begin{aligned} p_k q_l - q_l p_k &= \begin{cases} \frac{h}{2\pi i} 1 & \text{when } k = l \\ 0 & \text{when } k \neq l \end{cases} \\ p_k p_l - p_l p_k &= 0, \\ q_k q_l - q_l q_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

قدمت h في المعادلات بواسطة (العلاقات التبادلية) ذات الأهمية الأساسية لميكانيكا الكم. وهذه العلاقات التبادلية تناظر شروط الكم للنظرية الثابتة الكلاسيكية للحركة، لكن حيث إن هذه الشروط يمكن تطبيقها فقط على النظام الدوري المتعدد، العلاقات التبادلية الحالية يجب النظر إليها على أنها تتحقق على العموم لأي حركة. في الحقيقة (كما سيظهر لاحقاً) هي ضرورية لإعطاء معنى لمشكلة تكامل معادلات الحركة، التي سوف نقدمها الآن.

المعادلات القانونية (1) للنظرية الكلاسيكية، إذا عبر عنها بحدود في أقواس Poisson تصبح:

$$\dot{p}_k = [H p_k], \quad \dot{q}_k = [H q_k].$$

الافتراض الأبسط هو لتولي هذه المعادلات رسمياً في نظرية الكم، هو إبدال أقواس Poisson بنظيرتها في نظرية الكم. ولذلك فإننا نفترض أن معادلات

الحركة في نظرية الكم هي:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_k &= \frac{2\pi i}{h} (Hp_k - p_kH), \\ \dot{q}_k &= \frac{2\pi i}{h} (Hq_k - q_kH). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

من الواضح أن المعادلات (15)، (16) معتمدة بعضها على بعض. تحديداً المسموح فقط هو افتراض صحة المعادلة (15) عند لحظة وحيدة في الزمن. تبادل العلاقات في أي وقت آخر يجب أن يحدد خلال حل المعادلات (16)، ومع ذلك فالحسابات برهنت أن المعادلات (15) لا تعتمد فعلياً على الزمن. الآن اكتمل الأساس الرسمي للميكانيكا الجديدة، لأي تطبيق فيزيائي على أية حال شكل الهاميلتونيان Hamiltonian المقابل لأي مسألة ديناميكا خاصة يجب أن يكون معلوماً. وبشكل عام يكفي، (من مبدأ المقابلة)، أن نفترض لها نفس الشكل في النظرية الكلاسيكية. الغموض فيما يخص ترتيب العوامل في حاصل الضرب الذي قد يحدث نادراً هنا، وإذا حدث فإن بعض الاعتبارات الخاصة كافية لتحديد الترتيب الصحيح.

شروط قانون حفظ الطاقة وتردد بور Bohr ليست محتواه صراحة في فروض النظرية، ولذلك فمن الضروري إثبات أنه يمكن استنتاجها من نظرية الكم. نبدأ بتشكيل مصفوفة قطرية W عناصرها:

$$W(nm) = \begin{cases} T_n h & \text{when } n = m \\ 0 & \text{when } n \neq m \end{cases} \quad (17)$$

T_n قيم الحدود في المعادلة (5). المشتقة بالنسبة للزمن لأي مقدار x يمكن التعبير عنها بحدود في هذه المصفوفة بالمعادلة:

$$\dot{x} = \frac{2\pi i}{h} (Wx - xW), \quad (18)$$

لأن العنصر (nm) في التعبير $(2\pi i/h)(wx - xw)$ هو:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi i}{h} \sum_k [W(nk)x(km) - x(nk)W(km)] \\ & = 2\pi i(T_n - T_m)x(nm) \\ & = 2\pi i v(nm)x(nm) = \dot{x}(nm) \end{aligned}$$

باستخدام المعادلة (10). من المعادلة (18) ومعادلات الحركة (16) نجد أن:
أو $Wq - qW = Hq - qH$ و $Wp - pW = Hp - pH$

$$(W - H)p = p(W - H), \quad (W - H)q = q(W - H). \quad (18')$$

أي أن المصفوفة $W - H$ تبادلية مع كل من q و p وبالتالي أثبت أنها تبادلية مع أي دالة في q و p يمكن أن تمثل كمتسلسلة قوى. بالأخص أنها تبادلية مع H أي أن:

$$(W - H)H - H(W - H) = WH - HW = 0, \quad (19)$$

وباستخدام معادلة (18) تعني أن:

$$\dot{H} = 0, \quad (20)$$

تعبيراً عن حفظ الطاقة.

المعادلة (20) تعطي لعناصر H عدداً لانهائياً من المعادلات $v(nm)H(nm) = 0$. إذا كان $v(nm) = 0$ فقط عند $n = m$, فجميع العناصر غير القطرية في H هي الصفر وبالضرورة H مصفوفة قطرية. وفي هذه الحالة يقال للنظام إنه غير «متحلل» وقد يحدث أن يكون $v(nm) = 0$ لقيم $n \neq m$ ، والعناصر المقابلة في H غير معينة و H ليس من الضروري أن يكون مصفوفة قطرية. يسمى النظام في هذه الحالة «متحلل» degenerate.

ونحصل أيضاً من المعادلة (18') أن

$$(W_n - H_n) p(nm) = p(nm) (W_m - H_m),$$

$$(W_n - H_n) q(nm) = q(nm) (W_m - H_m),$$

أي أن $W_n - H_n = W_m - H_m$ لأي قيمة من m, n وبالتالي فإن

$$H = W + C,$$

حيث C مصفوفة الوحدة مضروبة في مقدار ثابت. والأكثر ملائمة وضع

$$H = W. \quad (21)$$

الجهاز الرياضي الخاص بصورة الجسيم تم توضيحه أعلاه. التحليل الرياضي للجسيم نوقش بالتفصيل في مكان آخر لكن أهم قاعدتين تتبع طبيعياً عند هذه المرحلة من مبدأ التقابل:

١- المتوسط الزمني للكمية ممثلاً بمتسلسلة فوريير معطى بحدود لا تعتمد على الزمن. ولذلك، بالنسبة للنظام غير المتحلل، العناصر القطرية للمصفوفة ممثلاً لأي متغير تعطي المتوسط الزمني المقابل لمختلف الحالات الثابتة.

٢- عملية الإشعاع، عند استخدام صورة الجسيم، يمكن اعتبارها كانبعاث الفوتونات مع ترددات الطيف $\nu(nm)$ مصحوبة في نفس الوقت بانتقال الذرة من الحالة المبدئية بطاقة W_n إلى الحالة النهائية بطاقة W_m ($W_n > W_m$). الشدة (معدل انبعاث الطاقة) يمكن تمثيله إحصائياً $A(nm)h\nu(nm)$ حيث $A(nm)$ هو احتمال الانتقال اللحظي من الحالة n إلى الحالة m مع انبعاث فوتون. على الجانب الآخر، النظرية الكلاسيكية تعطي لمتوسط الشدة المقابل التوافقي ذو الترتيب τ ، $2 \cdot |\mathbf{r}_\tau|^2 [\tau\nu]^4 (2\pi)^4 (e^2/c^3) / 3$ حيث $e\mathbf{r}$ هو متجه ثنائي القطب للإلكترون (\mathbf{r} هو متجه له المركبات $x = \sum_k q_k^{(x)}, y = \sum_k q_k^{(y)}, z = \sum_k q_k^{(z)}$ هي الإحداثيات المستطيلة للإلكترون).

بمساواة التعبيرات في النظريتين والاستعاضة عن حدود فورير بعناصر المصفوفة نحصل على احتمال الانتقال:

$$A(nm) = \frac{1}{h\nu(nm)} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [2\pi\nu(nm)]^4 |\mathbf{r}(nm)|^2 \cdot 2. \quad (22)$$

تبرير هذه القاعدة الثانية غير واضح لأن نظرية ماكسويل Maxwell تحتاج أيضاً إلى إعادة النظر. على أية حال المعادلة (22) تعين فقط المتوسط الزمني للإشعاع المنبعث، وقد وضح في الفصل الخامس البند ٤ أن نظرية ماكسويل هي المختصة لتقديم هذه المعلومات بالضغط.

٢- نظرية التحويلات

المخطط الرياضي لميكانيكا الكم تم استنتاجه في البند ١، بالطريقة التي تعرض تشابهه مع الميكانيكا الكلاسيكية، وهو حتى الآن ليس في الشكل القابل للاستعمال بسهولة. في هذا الجزء سنوضح أن الحل لمسألة ديناميكية في نظرية الكم يكافئ مبدأ انتقال المحاور الأساسية لشكل Hermitian أو الممتد tensor. هذا يوفر الأساس لطريقة حل عملية ويوضح مدى توافق الشروط الموضوعية (المفروضة).

لنفرض مجموعة من المصفوفات الهرميتية Hermitian p_k, q_k يمكن إيجادها ولا تعتمد على الزمن وتحقق العلاقات التبادلية، وتجعل المصفوفة $H(p, q)$ مصفوفة قطرية. المسألة الديناميكية إذا تم حلها لأنه إذا كانت المصفوفات مزودة بعوامل للزمن $e^{(2\pi i/\hbar)(H_n - H_m)t}$ حيث H_m, H_n هي العناصر القطرية للمصفوفة H فيتضح بسهولة أن معادلات الحركة (16) قد تحققت. إذا كانت $q_k^{(0)}, p_k^{(0)}$ أي مجموعة من المصفوفات تحقق العلاقات التبادلية، فالتحويلات:

$$p_k = S^{-1} p_k^{(0)} S, \quad q_k = S^{-1} q_k^{(0)} S, \quad (23)$$

حيث S أي مصفوفة سوف تعطي مجموعة جديدة مشابهة تحقق العلاقات التبادلية. هذا يتضح بالتعويض جبرياً بالمعادلات (23) في العلاقات التبادلية للمتغيرات الجديدة، وبطريقة مماثلة أثبت بسهولة أنه إذا كانت f أي دالة في $p_k^{(0)}$ و $q_k^{(0)}$ يمكن كتابتها بشكل متسلسلة القوى، فإن:

$$f(p_k, q_k) = f(S^{-1}p_k^{(0)}S, S^{-1}q_k^{(0)}S) = S^{-1}f(p_k^{(0)}, q_k^{(0)})S. \quad (24)$$

لأنه يمكن إيجاد مصفوفات هرميتية خاصة تحقق العلاقات التبادلية. فالمسألة تختصر لإيجاد دالة التحويل S حيث:

$$S^{-1}H(p_k^{(0)}, q_k^{(0)})S = W, \quad (25)$$

حيث W مصفوفة قطرية.

التحويلات (23) تشابه التحويلات القانونية canonical للميكانيكا الكلاسيكية، لكن لها تفسير أيضاً هندسي ذو أهمية عظمى إذ فسرت مصفوفات نظرية الكم كأنها امتدادات في فضاء الوحدة ذي الأبعاد اللانهائية (فراغ هيبرت). وهذا لا يوفر فقط طريقة تحليلية لتمثيل التحويلات (23) والمعادلة (25) لكن أيضاً يمدنا بلغة مريحة للتفسير الفيزيائي للنظرية. كما وضح في الفصل الرابع فقرة ١. للأعراض الحالية تكفي صياغة مجردة خالصة.

لتكن $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots$ مجموعة لانهاية من متجهات الوحدة المتعامدة. الفراغ المستخدم هو فراغ جميع المتجهات على الصورة:

$$t = \sum_n t_n^{(0)} u_n^{(0)},$$

حيث المركبات $t_n^{(0)}$ أعداد مركبة. الممتد tensor q يعبر عن علاقة خطية بين متجهين تبعاً للمعادلات:

$$t = q_s$$

$$t_n^{(0)} = \sum_m q^{(0)}(nm) s_m^{(0)}.$$

نعتبر الآن التحويل من نظام الإحداثيات السابق $U_0(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots)$ إلى نظام إحداثيات جديد $U(u_1, u_2, \dots)$ ، والمتجهات الجديدة معطاة بحدود المتجهات القديمة بواسطة المعادلات الخطية:

$$u_n = \sum_m S(mn) u_m^{(0)}. \quad (26)$$

المركبات t_n لأي متجه t و $q(nm)$ لأي مصفوفة q في النظام الجديد تعطي بالمعادلات:

$$t_n^{(0)} = \sum_m S(nm) t_m, \quad (27)$$

$$q(nm) = \sum_{k,l} S^{-1}(nk) q^{(0)}(kl) S(lm), \quad (28)$$

حيث S^{-1} هي مصفوفة التحويل $t_n = \sum_m S^{-1}(nm) t_m^{(0)}$ وهي عكس المعادلة (27). [S أخذت فرضاً غير منفردة] أهمية خاصة تعطي لما يسمى تحويلات الوحدة، أي التحويلات التي لا تغير الصورة التربيعية $\sum_n t_n t_n^*$ والتي تشابه المسافة في الفراغ الأحادي. تم فعلاً التحقق أنه لهذه التحويلات الوحودية:

$$\sum_k S(nk) S^*(mk) = \sum_k S(kn) S^*(km) = \delta_{nm},$$

وهي تعني أن: $S^{-1} = \bar{S}^*$ أو

$$S \bar{S}^* = \bar{S}^* S = 1. \quad (29)$$

وهي تماثل في الفراغ الوحودي دوران نظام الإحداثيات حقيقياً في الفراغ الثلاثي الأبعاد.

يتضح الآن أن المعادلات (23) هي بالتحديد بشكل معادلات (28)، بحكم القاعدة (12) لحاصل ضرب الكم q_k, p_k يمكن اعتبارها نفس المصفوفات أو الممتدادات مثل $q_k^{(0)}, p_k^{(0)}$ عبر عنها بنظام إحداثيات جديد U ، الإحداثيات الجديدة مرتبطة بنظام الإحداثيات الأصلي U_0 بالمعادلات (27). المعادلة (25) تعبر عن الشرط على مصفوفة التحويل S أن يكون في النظام الجديد الممتد H في شكل قطري — أي أن متجه الإحداثيات في النظام الجديد هو المحور الرئيسي في H . يكفي اعتبار تحويلات الوحدة فقط $[S$ تحقق المعادلة (28)] لأنه تحت هذه الشروط فمن المعروف أن مسألة تحويل المحور الرئيسي، على الأقل للمصفوفات المحدودة دائماً لها حل.

كلمة ضرورية بالنسبة للتعاريف بصفة عامة ليس من المفيد تمييز المصفوفات في نظم الإحداثيات المختلفة برموز مختلفة أنها تكون أكثر راحة عند تمييزها باستخدام حروف مختلفة لترقيم المركبات في كل نظام إحداثيات. القيم العددية المختلفة للترقيم سوف يشار إليها بالشرطه Prime أي أن $p(l'l'')$ مثلاً، تمثل المركبة p في النظام l و $p(a'a'')$ تمثل المركبات في نظام آخر للإحداثيات a . المعادلة الأولى في (23) مثلاً يمكن كتابتها:

$$p(a'a'') = \sum_{l'} \sum_{l''} S^{-1}(a'l') p(l'l'') S(l''a'').$$

ترقيم مصفوفة التحويل S يشير طبيعياً إلى نظم إحداثيات مختلفة. الحل لمسألة ميكانيكا الكم المعطى بمعادلات الحركة (16) والعلاقات التبادلية (15) تختصر إلى مسألة تحويل المحور الرئيسي في مصفوفة هيرميت Hermitian H . ويبقى أن نصف باختصار طريقة الحل، وهي معروفة. المعادلة (25) يمكن كتابتها:

$$HS - SW = 0, \quad (30)$$

وهي تعطي لعناصر S المعادلات:

$$\sum_{l''} H(l'l'') S(l''a') - \sum_{\alpha''} S(l'a'') W(a''a') = 0$$

حيث

$$\left(\begin{array}{l} l' = 1, 2, \dots \\ a' = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

أو لأن W قطرية، مجموعة لانهائية من المعادلات الخطية المتجانسة.

$$\sum_{l''} H(l'l'') S(l''a') - S(l'a') W_{\alpha'} = 0 \quad (l' = 1, 2, \dots), \quad (31)$$

لتعيين أي عناصر في أي عمود من المصفوفة $S(l'a')$ القيمة $W_{\alpha'}$ التي تظهر كبارامترات يمكن أيضاً تعيينها، وفي الحقيقة دون الاعتماد على $S(l'a')$ لأن المعادلات (31) سيصبح لها حل فقط عندما يكون محدد الطرف الأيسر مساوياً للصفر، أي عندما يكون $W_{\alpha'}$ حلول للمعادلة الجبرية:

$$\begin{vmatrix} H_{(11)} - W & H_{(12)} & H_{(13)} & \cdot \\ H_{(21)} & H_{(22)} - W & H_{(23)} & \cdot \\ H_{(31)} & H_{(32)} & H_{(33)} - W & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0. \quad (32)$$

الجدور $W_{\alpha'}$ لهذه المعادلة هي القيم المميزة للمعادلة (30) أو المعادلات (31) ودائماً هي قيم حقيقية. وهي العناصر القطرية في W ولذلك تعطي مستويات الطاقة في النظام، عندما تكون جذور المعادلة (32) متعددة، فإن النظام متحلل ليكون هناك عندئذٍ تطابق للترددات من المعادلة (7).

كل $W_{\alpha'}$ تقابل حلاً مميزاً، $C_{\alpha'}S(1a'), C_{\alpha'}S(2a'), \dots$ للمعادلات (31) ومن ثم عموداً من المصفوفة S ، والثابت الاختياري $C_{\alpha'}$ يحدث بسبب أن المعادلات (31) متجانسة. في حالة النظام غير المتحلل رأينا فعلاً أن أي حلين مميزين يكونان متعامدين كل على الآخر، أي أن:

$$\sum_{l'} S(l'a') S^*(l'a'') = 0,$$

عندما $a' \neq a''$.

العلاقة (29) متحققة لعناصر غير قطرية. وقد تتحقق أيضاً لعناصر قطرية عند الاختيار المناسب للثابت $C_{\alpha'}$ ، بالرغم من أن هذا الوضع القياسي يحدد فقط المقدار المطلق للثابت $C_{\alpha'}$. ولذلك هناك دائماً عامل غير معين له المقدار المطلق واحد مشترك لعناصر كل عمود من S . في حالة النظام المتحلل يوجد مزيد من عدم التحديد، لكن المعادلة (29) تظل متحققة.

من دالة التحويل S الإحداثيات والعزوم التي تشكل الحل معطاة بالمعادلات (23). التفسير الفيزيائي الموسع لـ S موجود في بند فقرة ٥.

افترضنا سابقاً أن النظريات للمصفوفات المحدودة ومجموعات المعادلات صحيحة في الحالات المناظرة اللانهائية الخاصة بميكانيكا الكم. هذا يمكن تحقيقه مباشرة فقط تحت شروط خاصة، لكن المعالجة الأكثر دقة أوضحت أن النتائج للمعالجة الشكلية السابقة هي أساساً صحيحة. يوجد اختلاف واحد هام في حالة المصفوفات اللانهائية: وهي احتواء الطيف على متتابعة متصلة من القيم بالإضافة إلى قيمة غير متصلة. في حالة الطاقة يرجع هذا لوجود أطراف ضوئية متصلة. حدوث القيمة المميزة المتصلة يعني أيضاً في بعض أنظمة الإحداثيات أن عناصر المصفوفات لها قيم مؤشرات متصلة أو غير متصلة في نطاق معين ومتصلة في الآخر. ولهذا فمصفوفة العلاقات لدينا يجب توسيعها لتشمل هذه الحالة. أساليب ديراك Dirac^٤ سوف تستخدم لهذا الغرض بالرغم من الطابع الرسمي بشكل ما، فلها ميزة شديدة الوضوح ويمكن تبريرها بدقة في جميع الحالات التي تحدث عملياً.

في المقام الأول المجموع يجب إبداله بالتكامل في النطاق حيث المؤشرات متغيرات مستمرة والعناصر تصبح دوال في مجموعتين من المتغيرات. ولهذا عندما يكون النطاق متصلًا فإن قاعدة حاصل الضرب مثلًا تصبح:

$$pq(nm) = \int dk p(nk) q(km),$$

بينما في حالة النطاق المختلط سوف يوجد مجموع وتكامل. لتمثيل مصفوفة الوحدة في الحالة المتصلة قدم ديراك الدالة $\delta(\xi)$ تقابل الدالة δ_{nm} معرفة بالخواص التالية:

$$\xi \delta(\xi) = 0,$$

أي أن $\delta(\xi) = 0$ وفي حالة أن $\xi \neq 0$

$$\delta(-\xi) = \delta(\xi), \quad (33)$$

وأن

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \delta(\xi) d\xi = 1, \quad (34)$$

حيث الصفر يقع بين ξ_1 و ξ_2 ، أي أنها دالة لها نقطة منفردة عند $\xi = 0$ وهي ممكنة فقط كنهاية لمتابعة من الدوال. من الخواص السابقة نجد بسهولة أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(a - \xi) d\xi = f(a), \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta'(a - \xi) d\xi = f'(a), \quad (36)$$

حيث $f(\xi)$ أي دالة منتظمة وأن $\delta'(\xi) = (d/d\xi)\delta(\xi)$ المعادلة (35) تنتج التكامل بالتجزؤ. ولأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - \xi) \delta(\xi - b) d\xi = 0$$

حيث $a \neq b$ وأن:

$$\begin{aligned} \int db \int \delta(a - \xi) \delta(\xi - b) d\xi \\ = \int \delta(a - \xi) d\xi \int \delta(\xi - b) db = 1, \quad (37) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(a - \xi) \delta(\xi - b) d\xi = \delta(a - b), \end{aligned}$$

لأن التكامل له جميع خواص الدالة δ للقيمة $a - b$. عناصر مصفوفة الوحدة في الحالة المتصلة يعبر عنها بحدود من دالة δ لأن $\delta(a' - a'')$ من معادلة (37) لها الخاصية أن:

$$\int \delta(\alpha' - \alpha''') x(\alpha''' \alpha'') d\alpha''' = x(\alpha' \alpha''). \quad (38)$$

أي أن:

$$1(\alpha' \alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha'').$$

المصفوفة القطرية ذات المؤشرات المتصلة هي مصفوفة بالشكل $q(a' a'') \delta(a' - a'')$ التوسيع لحالة المؤشرات المتعددة لا يمثل صعوبة، مصفوفة الوحدة مثلاً تصبح:

$$1(\alpha' \alpha'') = \delta(\alpha'_1 - \alpha''_1) \delta(\alpha'_2 - \alpha''_2) \dots \delta(\alpha'_f - \alpha''_f)$$

وتكتب ببساطة على شكل: $\delta(\alpha' - \alpha'')$

في نظرية الكم، أنظمة الإحداثيات حيث المقادير المختلفة عن الطاقة تأخذ الشكل القطري أيضاً مهمة. في هذا النظام ثبت عادة ما يكون مناسباً إبدال مؤشرات كل المصفوفات بالعناصر القطرية المقابلة لمصفوفات قطرية في النظام. الصفوف والأعمدة تعين بالقيم المميزة للمصفوفات التي تعرف إحداثيات النظام. هذا يكافئ إبدال أعداد الكم بالطاقات المقابلة للحالات الثابتة في النظام ذي درجة واحدة للحرية. وفي النظام الذي له درجتين من الحرية بالطاقة والعزوم، وهكذا. وعموماً إذا كانت المصفوفات x_1, x_2, \dots, x_f لها الشكل القطري، فإن مصفوفة العناصر q سوف تكتب:

$$q(x'x'') = q(x'_1, x'_2, \dots, x'_f; x''_1, x''_2, \dots, x''_f),$$

الأحرف x', x'' تدل على قيم مميزة للمصفوفات المقابلة، كحالة خاصة. المصفوفة القطرية x ، عندما تكون المؤشرات متصلة لها الشكل:

$$x(x'x'') = x' \delta(x'_1 - x''_1) \delta(x'_2 - x''_2) \dots \delta(x'_f - x''_f). \quad (39)$$

ومن الطبيعي أن يسأل أي المصفوفات لها في نفس الوقت الصورة القطرية في نظام إحداثيات معين. الإجابة معروفة من نظرية أشكال هيرميت Hermitian وهامة للغاية لنظرية الكم. أي مجموعة للمصفوفات التبادلية يمكن تحويلها إلى الصورة القطرية في نفس الوقت باستخدام التحويلات الوحيدة. ولهذا يمكن دائماً إيجاد نظام إحداثيات حيث إحداثيات المكان q_1, \dots, q_f قطرية لكن إذا تحققت علاقات التبادل فإن العزوم p_1, \dots, p_f ليس لها الشكل القطري.

٣- معادلة شرودنجر Schrödinger

قبول المصفوفات المتصلة في المخطوط الرياضي يسمح بصيغة جديدة لمسألة تحويل المحور الأساسي. إذا كان نظام الإحداثيات الأصلي اتخذ حيث علاقة

التبديل متحققة حيث q_k مصفوفة قطرية متصلة، فالمعادلة التي تعين دالة التحويل S للنظام الذي به أي دالة قطرية F تصبح معادلة تفاضلية جزئية، وهي تماثل المعادلات (31). في حين أن التبرير الدقيق للطريقة المستخدمة هنا (أي طريقة Dirac) يكون صعبًا، فالنتائج قد تأكدت بطرق أكثر دقة وإن كانت أكثر تعقيدًا.

لأن نظام الإحداثيات الأصلي يحتاج فقط ليكون حيث مصفوفات الإحداثيات قطرية ولا يتحمل علاقة ضرورية لأي مسألة ديناميكية خاصة، فنستطيع أن نفرض q_k بالشكل القطري العام:

$$q_k = q'_k \delta(q'_1 - q''_1) \dots \delta(q'_f - q''_f), \quad (40a)$$

والمؤشرات صممت باستخدام القيم المميزة q'_k للمصفوفة q_k . لتمثيل العزوم المرافقة يجب إيجاد مجموعة من المصفوفات التي تحقق العلاقات التبادلية (15) مع q_k السابقة. المجموعة الممكنة يحصل عليها باتخاذ:

$$p_k(q'q'') = \left. \begin{aligned} & \frac{h}{2\pi i} \delta'(q'_k - q''_k) \delta(q'_1 - q''_1) \dots \delta(q'_{k-1} - q''_{k-1}) \\ & \cdot \delta(q'_{k+1} - q''_{k+1}) \dots \delta(q'_f - q''_f). \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

وتوضح بحساب $p_k q_l - q_l p_k$ أن العلاقات التبادلية متحققة. البرهان لدرجة حرية واحدة كالتالي: العنصر $(q'q'')$ للمصفوفة $(pq - qp)$ هو:

$$\frac{h}{2\pi i} \int dq''' [\delta'(q' - q''') q''' \delta(q''' - q'') - q' \delta(q' - q''') \delta'(q''' - q'')].$$

وباستخدام التكامل بالتجزؤ يصبح الحد الأول:

$$\begin{aligned} & \int dq''' \delta(q' - q''') \frac{\partial}{\partial q'''} [q''' \delta(q''' - q'')] \\ & = \int dq''' [q''' \delta'(q''' - q'') \delta(q' - q''') \\ & \quad + \delta(q' - q''') \delta(q''' - q'')]. \end{aligned}$$

ولذلك

$$\begin{aligned} & (pq - qp) (q'q'') \\ & = \frac{h}{2\pi i} \int dq''' [(q''' - q') \delta(q' - q''') \delta'(q''' - q'')] \\ & \quad + \frac{h}{2\pi i} \int \delta(q' - q''') \delta(q''' - q'') dq'''. \end{aligned}$$

التكامل الأول قيمته صفر من معادلة (33) بينما التكامل الثاني يساوي $(h/2\pi i)\delta(q' - q'')$ من المعادلة (37). ومن ثم:

$$(pq - qp) (q'q'') = \left(\frac{h}{2\pi i}\right) \delta(q' - q'') = \left(\frac{h}{2\pi i}\right) I(q'q'')$$

والعلاقات التبادلية متحققة. التوسيع لعدة درجات من الحرية يلي دون صعوبة.

لننظر الآن إلى المسألة العامة لتحويل أي دالة $F(p, q)$ للشكل القطري باستخدام التحويل الوحدوي S . كما في الحالة غير المتصلة (منفصلة) S تتعين أصلاً بالمعادلة (25) التي أصبحت الآن:

$$S^{-1}FS = F' \delta(F' - F''),$$

المؤشرات في النظام الجديد حيث F قطرية يرمز لها F' و F'' . مرة أخرى هذه يمكن كتابتها على شكل المعادلة (30)

$$FS = S [F' \delta(F' - F'')]$$

$$\int F(q'q'') S(q''F') dq'' = S(q'F') F', \quad (41)$$

وهي معادلة تكاملية تقابل المجموعة اللانهائية من المعادلات الخطية (31). غير أن هذه تصبح معادلة تفاضلية جزئية عند التعويض بالقيم الخاصة لـ p_k, q_k المعطاه بالمعادلات (40) في الطرف الأيسر. بإجراء التكامل واستخدام خواص الدالة δ نحصل على:

$$\int F(p_k, q_k) (q'q'') S(q''F') dq'' = F\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'_k}, q'_k\right) S(q'F'), \quad (42)$$

حيث $F([h/2\pi i][\partial/\partial q'_k], q'_k)$ هو المؤثر الناتج من F . بالتعويض

$$p_k \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'_k}, \quad q_k \rightarrow q'_k. \quad (43)$$

نحتاج فقط للبرهان في حالة درجة واحدة من الحرية للحالة الخاصة $F = q$ و $F = p$ نحصل على النتيجة مباشرة لأنه من المعادلات (36)، (35)

$$\int \frac{h}{2\pi i} \delta'(q' - q'') S(q''F') dq'' = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S(q'F')}{\partial q'},$$

$$\int q' \delta(q' - q'') S(q''F') dq'' = q' S(q'F').$$

لأن جميع الدوال التي تحتاج لاعتبارها يمكن بناؤها باستخدام حاصل الضرب والجمع من q و p ، يبقى فقط إثبات أنه إذا تحققت المعادلة (42) لكل من F_1 و F_2 فإنها تتحقق لـ $F_1 + F_2$ و $F_1 F_2$ ، تحققها لـ $F_1 + F_2$ بسيط جدًا بالنسبة $F_1 F_2 = \int F_1(q'q'') F(q'''q'') dq'''$ تعوض في المعادلة (42)

نحصل على:

$$\begin{aligned}
 & \iint \cdot F_1 (q' q''') dq''' F_2 (q''' q'') dq'' S (q' F') \\
 & = \int F_1 (q' q''') dq''' \int F_2 (q''' q'') S (q' F') dq'', \\
 & = \int F_1 (q' q''') dq''' F_2 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'''}, q''' \right) S (q' F'), \\
 & = F_1 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'}, q' \right) F_2 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'}, q' \right) S (q' F'), \\
 & = F_1 F_2 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'}, q' \right) S (q' F'),
 \end{aligned}$$

وتم إثبات النظرية.

دالة التحويل المطلوبة $S(q'F')$ يجب أن تكون حلاً للمعادلة التفاضلية

الجزئية:

$$F \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'_k}, q'_k \right) S (q'F') - F' S (q'F') = 0, \quad (44)$$

حيث F' هو بارمتر يقابل $W_{\alpha'}$ في المعادلات (31) التي تناظرها المعادلة (44). هنا سيوجد فقط بعض القيم المنفصلة أو نطاقات متصلة لـ F يمكن الحل بالنسبة لها. هذه القيم المميزة تعطي العناصر القطرية في F . الشروط التي تجعل التحويل ($\bar{S}^* = S^{-1}$) وحدويًا، لها أهمية في تعيين طبيعة الحل للمعادلة (44). إذا كانت S متصلة في المؤشرين يمكن كتابتها:

$$\int S^* (q'F') S (q'F'') dq' = \delta (F' - F''), \quad (45)$$

$$\int S^* (q'F') S (q''F') dF' = \delta (q' - q''), \quad (46)$$

وهي تماثل المعادلات (28). توجد صورة باستخدام الجمع عندما تكون القيمة المميزة للطيف تحتوي على جزء منفصل discrete.

المسألة الرياضية التي تمت معالجتها عامة تمامًا. أن يوجد مقابل

فيزيائي لذلك سوف يظهر بعد توسيع المفهوم الفيزيائي لدالة التحويل

في البند فقرة ٥. في الوقت الحالي علينا فقط ملاحظة أن الطريقة السابقة عندما تطبق على هاميلتونيان H تعطي حلاً لمعادلات الحركة. إذا عوضنا H بدلاً من F في المعادلة (44) فالمعادلة التفاضلية الناتجة هي معادلة شرودنجر^١ التي اكتشفت أصلاً في سياق مختلف تمامًا. دالة التحويل المقابلة $S(q'H')$ في هذه الحالة عادة ما تكتب $\psi w(q)$. معادلة شرودنجر تصبح:

$$H \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, q_k \right) \psi w(q) - W \psi w(q) = 0 \quad (47)$$

وقيمها المميزة تعطي مستويات الطاقة في النظام. الحلول $\psi w(q)$ تكون أعمدة لمصفوفة التحويل، والتي يمكن مقارنتها مع S في البند فقرة ٢. كلاهما يمثلان تحويلات للنظام الذي به الطاقة قطرية — في الحالة الحاضرة — على أية حال النظام المبدئي حالة خاصة حيث الإحداثيات قطرية، مقابلة لاختيار خاص لـ $q_k^{(0)}$ و $p_k^{(0)}$ في البند فقرة ٢.

في الحالات النموذجية لقيم الطيف المميزة المنفصلة شروط التعامد (45) تصبح:

$$\int \psi^* w'(q) \psi w''(q) dq = 0 \quad (48)$$

عندما $W' \neq W''$

$$\int |\psi w(q)|^2 dq = 1. \quad (49)$$

المعادلة (49) تكافئ على العموم الشروط الحدية، وتعامد الحلول المميزة $\psi w(q)$ ، وهي عادة ما تأتي بتأكيد صلاحية المعادلات (48). كما في حالة مصفوفة التحويل S في البند فقرة ٢ يبقى في كل عمود $\psi w(q)$ معامل غير محدد المرحلة $e^{i\varphi w}$ غير معين بالشروط (49) (جعلها طبيعية).

ومصفوفات الإحداثيات والعزوم في النظام حيث تصبح الطاقة قطرية باستخدام المعادلات (23)

$$p(W'W'') = \int \psi^* w' \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi w''}{\partial q} dq, \quad (50)$$

$$q(W'W'') = \int \psi^* w'(q) q \psi w''(q) dq. \quad (51)$$

المعادلات (47)، (50)، (51) تشكل أنجح طريقة رياضية لمعالجة المسألة الديناميكية لميكانيكا الكم، لكنها لا تساهم بأي جديد في التفسير الفيزيائي. اعتبارات خاصة تكون ضرورية لتوضيح المعنى الفيزيائي لمصفوفة التحويل (انظر فقرة ٥).

٤- طريقة الاضطراب

وصف الملامح الرئيسية لنظرية الاضطراب في ميكانيكا الكم عند هذه المرحلة ضروري. هذه الطريقة يمكن استخدامها عندما يفك الهاميلتونيان H بدلالة بارمتر صغير λ في الشكل:

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \dots \quad (52)$$

والحل للمسألة المقابلة لهاميلتونيان H_0 معروفاً، أي عندما تكون المصفوفات p و q وأي دالة في p و q معروفة في النظام حيث H_0 قطري (بالنسبة للنظام H_0). فيما يلي الحرف H يستخدم لمصفوفة الطاقة في هذا النظام للإحداثيات، وحيث W ترمز لمصفوفة الطاقة في النظام حيث الهاميلتونيان الكامل قطري (بالنسبة إلى النظام H) مقابلاً للمعادلة (52) يمكن كتابته W في الشكل:

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots \quad (53)$$

حيث $W_0 = H_0$. دالة التحويل المطلوبة التي تقود من نظام H_0 إلى نظام H يمكن كتابتها على الصورة:

$$S = S_0 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \dots, \quad (54)$$

وأن S ستكون وحدوية للتقريب الصفري إذا كان:

$$S_0 \bar{S}_0^* = 1. \quad (55)$$

سنوجد الآن مجموعة من المعادلات التي تعين S . كما في بند فقرة ٢، S يجب أن تحقق المعادلة $HS = SW$ ، W تكون قطرية، بالتعويض من المفكوكات (52) و(53) و(54) في هذه المعادلة ومساواة المعاملات المختلفة لقوى λ نحصل على المعادلات:

$$\left. \begin{aligned} H_0 S_0 &= S_0 W_0, \\ H_0 S_1 - S_1 H_0 &= S_0 W_1, \\ H_0 S_2 - S_2 H_0 + H_2 S_2 - S_1 W_1 &= S_0 W_2, \\ \\ H_0 S_r - S_r H_0 + F_r (S_1 \dots S_{r-1}, H_1 \dots H_r) &= S_0 W_r, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

التي يمكن حلها بالتتابع لقيم S_0, S_1, \dots و W_0, W_1, \dots . المعادلة الأولى تعطي لعناصر S_0

$$S_0 (nn) [H_0 (nn) - H_0 (mm)] = S_0 (nm) h\nu_0 (nm) = 0, \quad (57)$$

حيث $\nu_0(nm)$ هي ترددات النظام غير المضطرب. يجب التمييز في هذه المرحلة بين الأنظمة غير المتحللة والمتحللة غير المضطربة. في الحالة الأولى $[\nu_0(nm) \neq 0 \text{ when } n \neq m]$ يتلو مباشرة من المعادلة (57) أن S_0

مصفوفة قطرية. في الحالة الثانية الحدود غير القطرية في S_0 ليس من الضروري أن تتلاشى. لأن معالجة الحالتين سوف تختلف بداية من هنا سوف نفترض أولاً أن النظام غير المضطرب غير متحلل. عندما S_0 قطرية، المعادلة (55) تتطلب أن $|S_0(nm)| = 1$ ، ولهذا، دون اعتبار للمراحل غير المحددة الموجودة دائماً في S ، يمكننا أن نأخذ $S_0 = 1$. المعادلة الثانية من (56) تصبح:

$$H_0 S_1 - S_1 H_0 + H_1 = W_1,$$

أو للعناصر:

$$h\nu_0(nm) S_1(nm) + H_1(mm) = W_1(nm) \delta_{nm}. \quad (58)$$

للعناصر القطرية هذا يعين إضطراب الطاقة للتقريب الأول:

$$W_1(nn) = H_1(nn). \quad (59)$$

عند $n \neq m$ المعادلة (58) تعين العناصر غير القطرية لـ S_1 ، العناصر القطرية في S_1 لا تعين من المعادلة (58) لكن مع تحقق الشرط $S\bar{S}^* = 1$ للتقريب الأول إذا اعتبروا أصفاراً. ولهذا:

$$S_1(nm) = -\frac{H_1(nm)}{h\nu_0(nm)} (1 - \delta_{nm}).$$

سوف تلاحظ تشابه هذه النتائج مع نظرية الاضطراب في الميكانيكا الكلاسيكية. بالأخص المعادلة (59) تقابل النظرية الكلاسيكية المعروفة أن دالة الاضطراب هي من الدرجة الأولى المتوسط لطاقة الاضطراب، لأن العناصر القطرية في H_1 هي المتوسط الزمني. لذلك تكتب المعادلة:

$$W_1 = \bar{H}_1.$$

المعادلات الباقية في (56) عندما تعالج بنفس الطريقة، تعطي:

$$W_r (nn) = F_r (nn) ,$$

$$S_r (nm) = -\frac{F_r (nm)}{hv_0 (nm)} (1 - \delta_{nm}) ,$$

كل F_r تعين بالمعادلات التي تسبق المعادلة التي ترتيبها r . إذا كان الحل غير المضطرب متحلاً فلا يلي من $W_0 S_0 = S_0 W_0$ أن S_0 قطرية. على سبيل المثال عندما $W_0(n+1) = W_0(n+2) = \dots = W_0(n+k)$ فالمعادلة (57) توضح أن S_0 ما زالت تحتوي عناصر تقابل الانتقالات بين الحالات $n+1, n+2, \dots, n+k$ المعادلة الثانية من (56) على كل حال توفر نظام من المعادلات الخطية المتجانسة تعطي العناصر غير المتلاشية من S_0 وفي نفس الوقت W_1 . مرة أخرى بتكوين المتوسط الزمني على الحركة غير المضطربة (أي ننتقي الصفوف n والأعمدة m التي لها $v(nm)$ تتلاشي) يعطي المعادلة:

$$\bar{H}_1 S_0 = S_0 W_1, \quad (60)$$

حيث توفر نظاماً من المعادلات الخطية المتجانسة تماثل بدقة المعادلات (31). كما توجد W_1 لا تعتمد على S_0 من المعادلات المسماة المعادلات المقطعية secular:

$$\begin{vmatrix} H_1(n+1, n+1) - W_1 & \dots & H_1(n+1, n+k) \\ H_1(n+2, n+1) & \dots & H_2(n+2, n+k) \\ \vdots & & \\ H_1(n+k, n+1) & \dots & H_1(n+k, n+k) - W_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (61)$$

الجزور تعطي عناصر W_1 والمعادلات الخطية المقابلة تعين S_0 ما عدا عامل ترحيل في كل عمود. بداية من هنا تجرى الحسابات كما في النظام غير المتحلل.

٥- الرنين بين ذرتين: المعنى الفيزيائي لمصفوفات التحويل

المخطط الكامل للتفسير الرياضي لنظرية الكم يعتمد على بعض الفروض مثل المعنى الفيزيائي لدوال التحويل. لتوضيح طبيعة هذا الافتراضات وجعلها معقولة ومسألة بسيطة سوف تناقش أولاً — التفاعل لذرتين لهما نفس الرنين.^٧

لنعتبر ذرتين I، II، ولهما قيم الطيف المميزة $W_I(n)$ و $W_{II}(i)$ حيث لهما تردد مشترك، فمثلاً: $v_I(nm) = v_{II}(ik)$ أو $W_I(n) - W_I(m) = W_{II}(i) - W_{II}(k)$ إذن لهما نفس الرنين. تبادل الطاقة يمكنه الحدوث بين الذرتين حتى إذا كان التزاوج (الاقتران) بينهما ضعيفاً جداً، والتفاعل يحدث على الوجه التالي: الذرة I تنتقل من الحالة n إلى الحالة m معطية طاقة $h\nu(nm)$ بينما الذرة II تأخذ نفس الطاقة $h\nu(nm) = h\nu(ik)$ لتنتقل من الحالة k إلى الحالة i والعملية عكسية. إذا اعتبرت الذرات غير المقترنة كأنها النظام غير المضطرب فطاقة التفاعل H_1 يمكن معاملتها كالأضطراب بطريقة البند فقرة ٤. حالة الذرات المركبة في النظام الذي به $W_I + W_{II}$ قطرية يمكن تعيينها بواسطة عددين (nk) الأول يعطي حالة الذرة I والثاني حالة الذرة II. الحالات (nk) و (mi) في النظام غير المضطرب يكون له الطاقات المتساوية بالرجوع إلى العلاقة:

$$\begin{aligned} W_0(nk) &= W_I(n) + W_{II}(k) \\ &= W_I(m) + W_{II}(i) \\ &= W_0(mi) \end{aligned} \quad (62)$$

الناجمة من تساوي الترددات، لهذا ينتج الرنين تحلل مميز. المعادلة secular لتعيين الاضطراب W_1 في الطاقة يمكن تشكيله كما في بند فقرة ٢. باختيار عناصر طاقة التفاعل $H_1(nk; mi)$ التي لها الترددات

.(62) المعادلة $v(nk; mi) = (1/h)[W_0(nk) + W_0(mi)]$ تتلشى من المعادلة (61). المعادلة هذا يعطي مقابلاً للمعادلة (61).

$$\begin{vmatrix} H_1(nk; nk) - W_1 & H_1(nk; mi) \\ H_1(mi; nk) & H_1(mi; mi) - W_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (63)$$

الحلين لهذه المعادلة هما طاقتا الاضطراب $W_1(a)$ و $W_1(b)$ للحالتين في النظام المقترن بدلاً من الحالتين (nk) و (mi) لنفس الطاقة في النظام المنفصل (المفصول). [الرمز الأكثر تماثلاً $W(nk; mi)$ وغيره سوف يقود إلى الارتباك لأنه لا يوجد تناظر واحد لواحد مع الحالة غير المضطربة.] كل جذر للمعادلة (63) يقابل عمود في مصفوفة التحويل S (نحصل عليه بحل المعادلات الخطية) وستكون بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} S(nk; a) &= s(nk; a) e^{i\phi_a} \\ S(mi; a) &= s(mi; a) e^{i\phi_a} \end{aligned} \right\} \text{for } W_1(a),$$

$$\left. \begin{aligned} S(nk; b) &= s(nk; b) e^{i\phi_b} \\ S(mi; b) &= s(mi; b) e^{i\phi_b} \end{aligned} \right\} \text{for } W_1(b),$$

ϕ و هي مقادير حقيقة غير معينة من القاعدة القياسية $S\bar{S}^* = 1$. المصفوفة العمودية

$$S = \begin{vmatrix} s(nk; a) e^{i\phi_a} & s(nk; b) e^{i\phi_b} \\ s(mi; a) e^{i\phi_a} & s(mi; b) e^{i\phi_b} \end{vmatrix} \quad (64)$$

هي التقريب الصفري لدالة التحويل من النظام حيث الطاقات W_I و W_{II} قطرية للنظام حيث الطاقة الكلية $W = W_I + W_{II}$ قطرية.

يجب الإشارة إلى وجود حالة تكافؤ ذرتين في الرنين. هذه الحالة الخاصة نحصل عليها من السابق بوضع $k = m$ ، $i = n$ وبسهولة يتضح أن:

$$H_1 (nm; nm) = H_1 (mn; mn) ,$$

$$H_1 (nm; mn) = H_1 (mn; nm) ,$$

عندما يكون التفاعل متماثلاً في النظامين. لأن H_1 هيرميتان فالحدود غير القطرية في محدد المعادلة (63) حقيقية وال طول أصبحت:

$$\left. \begin{aligned} W_1 (a) &= H_1 (nm; nm) + H_1 (mn; nm) , \\ W_1 (b) &= H_1 (nm; nm) - H_1 (mn; nm) . \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

الحسابات بعد وضعها في صورة قياسية للمصفوفة المقابلة للعناصر s تعطي:

$$\begin{matrix} (a) & (b) \\ nm & \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\| \\ mn & \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\| \end{matrix} . \quad (66)$$

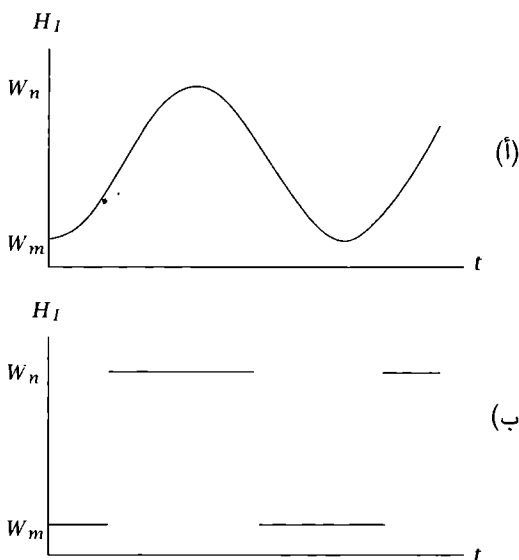
نعود الآن إلى الحالة العامة.

سوف نناقش في التالي مزيداً من المعلومات الفيزيائية التي يمكن الحصول عليها من هذه النتائج. نعتبر مثلاً، مسألة ما تقوله نظرية الكم عن طاقة الذرة I وحدها كدالة في الزمن. تقليدياً قد يحدث تبادل لطاقة دورية وتوافقية بين اثنين من المتذبذب المقترن ولهما تردد مساوٍ لتردد يتناسب مع قوة الاقتران، طاقة واحد من المتذبذبين سوف تعطي بمنحنى يشبه شكل (119). في نظرية الكم، من ناحية أخرى، من المتوقع أن طاقة الذرة I لها أما القيمة $W_I(n)$ أو $W_I(m)$ ، مع احتمال الانتقال بين هاتين

القيمتين يعتمد مرة أخرى على شدة الاقتران، لهذا $H_I(t)$ يجب أن تمثل بمنحنى يشبه (١٩ب). للتأكيد هذا المنحنى لا يمكن حسابه في نظرية الكم. ولا تعينه بالتجارب، ومع ذلك القواعد التي حصل عليها حتى الآن للتفسير الفيزيائي لميكانيكا الكم كافية لتسمح لحساب المتوسط الزمني ومربع متوسط تقلبات $H_I(t)$ أو أي دالة في $H_I(t)$. حسابات المتوسط الزمني لأي دالة في $H_I(t)$ يمكن إيجاده كالاتي: من القاعدة ١ في فقرة ١ العناصر القطرية في المصفوفة المثلثة لأي مقدار تعطي مباشرة متوسط الزمن للحالات المقابلة. المتوسط $\overline{f(H_I)}_a$ في الحالة a يمكن حسابه في حدود للعناصر القطرية $f(W_I(n))$ ، $f(W_I(m))$ للدالة $f(H_I)$ في النظام حيث H_I نفسها قطرية (نظام غير مضطرب) باستعمال دالة التحويل S من المعادلة (64):

$$\left. \begin{aligned} \overline{f(H_I)}_a &= [f(H_I)](aa) \\ &= S^*(nk; a)f(nk; nk)S(nk; a) \\ &\quad + S^*(mi; a)f(mi; mi)S(mi; a) \\ &= |S(nk; a)|^2 f(W_I(n)(n)) \\ &\quad + |S(mi; a)|^2 f(W_I(m)). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

هذا بالضبط هو التعبير عن المتوسط الزمني الذي ينتج عن الفرض أن $f(H_I)$ لها فقط القيم $f(W_I(n))$ ، $f(W_I(m))$ وأن هذه القيم تحدث مع ترددات نسبية $|S(nk; a)|^2$ و $|S(mi; a)|^2$ على الترتيب. لأن $f(W_I(n))$ ، $f(W_I(m))$ هي عناصر في $f(H_I)$ في النظام حيث $f(H_I)$ قطرية، الجزء الأول من الفرض السابق يكافئ فرضية أن القيم الممكنة للدالة f هي عناصر قطرية لمصفوفتها في النظام حيث f نفسها قطرية. الجزء الثاني على الجانب الآخر هو نتيجة لفرض أن $|S(nk; a)|^2$ هو الاحتمال النسبي لإيجاد قيمة $f(W_I(n))$ للدالة $f(H_I)$ عندما يكون النظام تاماً في الحالة a . [المؤشر (nk) يقابل القيمة $f(W_I(n))$ لأنه ترقيم للحالة الثابتة في النظام



شكل ١٩

حيث f قطرية. [تفسير أن الاحتمالات النسبية متوافقة بسبب الصورة القياسية: $|S(nk; a)|^2 + |S(mi; a)|^2 = 1$].

بينما مسألة خاصة قد عولجت هنا فإن العلاقات الشكلية هي نفسها في المسألة العامة للتحويل. ولهذا إذا كانت $S(\alpha' \beta')$ هي مصفوفة التحويل من النظام الذي به أي مقدار α قطري إلى النظام الذي به β قطري فإن المتوسط الزمني للدالة $f(\alpha)$ سيظهر دائماً في الشكل (67) أي أن:

$$\begin{aligned} f(\alpha)_{\beta'} &= [f(\alpha)] (\beta' \beta') \\ &= \sum_{\alpha'} S^* (\alpha' \beta') [f(\alpha)] (\alpha' \alpha') S (\alpha' \beta') \\ &= \sum_{\alpha'} |S (\alpha' \beta')|^2 f_{\alpha} (\alpha' \alpha') \end{aligned}$$

هو المتوسط الزمني للدالة $f(\alpha)$ المقابل للحالة β' .

ولذلك فإنه من المنطقي تعميم الفروض المذكورة سابقاً في الحالة الخاصة وأن نضيف الفرضيات التالية فيما يتعلق بالتفسير الفيزيائي لمخطوطة التحويل:^٨

«القيم التي يأخذها مقدار ما تعطى بالقيم المميزة لطيفه أي بعناصر مصفوفته في النظام الذي به المصفوفة نفسها قطرية. إذا كانت $S(\alpha'\beta')$ هي مصفوفة التحويل الوحودية من النظام الذي به α قطرية إلى النظام الذي به β قطرية فإن:

$$|S(\alpha'\beta')|^2 \quad (68)$$

هي الاحتمال النسبي لإيجاد قيمة α' لـ α عندما يكون معروفاً أن قيمة β' ترجع إلى β »

الفروض السابقة تنطبق بطبيعة الحال على حالة المؤشرات المتغيرة المتصلة وبالتالي حالة S التي تم الحصول عليها من معادلة شرودنجر. المناقشة التفصيلية للتفسير الفيزيائي للعناصر الإحصائية التي أدخلت على النظرية سوف نجدها خلال النص وبخاصة في الفصل الرابع. هنا سنلاحظ فقط أننا يجب أن نضيف الشرط المعبر عن أن التجربة قيد النظر تتيح فعلاً تحديد α' . للنظرة الأولى يبدو هذا الشرط تافهاً، لكنه على أية حال أساسي، لأن تطبيق ما سبق من تفسيرات للكميات (68) دون اعتبار للتجربة التي قادت إلى قياس α' سوف تظهر فعلاً عدم التوافق المنطقي.

وعند بناء الأساس للتفسير الفيزيائي للنظرية، نتابع لمزيد من التطوير للنظرية العامة للتحويل.

عناصر مصفوفة التحويل S تعطي فقط احتمالات لتشكيل مربعات للمقادير المطلقة، هذه المقادير نفسها يطلق عليها «احتمال السعات». بإجراء التحويل تبعاً من النظام α (النظام حيث α قطرية) للنظام β ثم التحويل

من النظام β إلى النظام γ ، باستخدام قواعد ضرب المصفوفات فنحصل على:

$$S(\alpha'\gamma') = \sum_{\beta'} S(\alpha'\beta') S(\alpha'\gamma'). \quad (69)$$

ولهذا دون الاعتماد على γ فإن احتمال السعة يكون $S(\alpha'\gamma')$ ويمكن تمثيله بدالة خطية لمجموعة احتمال السعات $S(\alpha'\beta')$. احتمال السعة لإيجاد α' دون النظر إلى القيمة المعنية سابقاً للمقدار γ' ، التي يمكن كتابتها $S(\alpha')$ ، (حتى في الحالة العامة) كدالة خطية لعناصر مصفوفة التحويل $S(\alpha'\beta')$ ، وأن النظام β يمكن اختياره بحرية. على وجه الخصوص β يمكن أن تكون الطاقة، $S(\alpha')$ يمكن التعبير عنه دائماً بالشكل

$$S(\alpha') = \sum_{W'} c_{W'} S_{W'}(\alpha'), \quad (70)$$

حيث $c_{W'}$ ثوابت، $S_{W'}(\alpha')$ مصفوفة التحويل إلى النظام حيث W قطرية. بينما الاحتمالات $S_{W'}(\alpha')$ دائماً ثابتة في الزمن، في إشارة إلى الحالة الثابتة W' ، فهذا غير صحيح عمومًا لقيم $|S(\alpha')|^2$ ، (أي أن عند تعيين شيء ما مختلف عن الطاقة). الاعتماد الفعلي لـ $S(\alpha')$ على الزمن يمكن استنتاجه من الاعتبارات التالية:

وفقاً للمعادلة (9) كل عنصر في المصفوفة $x(nm)$ له عامل زمني $e^{(2\pi i/h)(W_n - W_m)t}$ في النظام حيث الطاقة قطرية. لأنه بالانتقال إلى هذا النظام من أي نظام آخر.

$$x(nm) = \sum_{\alpha'\alpha''} S^*(\alpha'n) x(\alpha'\alpha'') S(\alpha''m), \quad (71)$$

فإن الاعتماد الصحيح على الزمن سوف يحدث من إضافة لكل عنصر $S(\alpha'n)$ عامل زمني $e^{-2\pi i/h)W_n t}$. وهذا ممكن لأن $S(\alpha'n)$ تحتوي على عامل مرحلي حر له القيمة المطلقة 1. بداية من الآن سوف يكون مفهومًا أن $S(\alpha'n) = S_{W'}(\alpha')$ تتضمن هذا العامل الزمني.

احتمال السعة الأكثر عمومية $S(\alpha')$ ، لأنه يمكن التعبير عنه بالشكل (70)، يجب أن يحقق المعادلة $HS - SW = 0$ ومعيناً $S_{W'}(\alpha')$. لأن $SW = -(h/2\pi i)(\partial S/\partial t)$ عندما S لها العامل الزمني الذي قدم سابقاً، فإن المعادلة لـ $S(\alpha')$ تصبح:

$$\sum_{\alpha''} H(\alpha' \alpha'') S(\alpha'') + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S(\alpha')}{\partial t} = 0. \quad (72)$$

خاصةً بأخذ α لتصبح الإحداثي q ، فالمعادلة تصبح المعادلة الموجية لشروندجر

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi(q) + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi(q)}{\partial t} = 0. \quad (73)$$

الحلول المميزة على الشكل $\psi_{W'}(q) = u_{W'}(q)e^{-(2\pi i/h)W't}$ تقابل العناصر $S_{W'}(\alpha')$ مع العامل الزمني، ومن (70) احتمال السعة الأكثر عمومية هو:

$$\psi = \sum_{W'} c_{W'} u_{W'} e^{-(2\pi i/h)W't} \quad (74)$$

كمثال على تطبيق المعادلة (72) نرجع مرة أخرى إلى مثال الذرات المقترنة. لنفرض أن القياس عند الزمن $t = 0$ يعطي نتيجة أن الذرة I في الحالة n والذرة II في الحالة k . ومن ثم فالمعادلة (72) تعطي التغيير مع الزمن للمصفوفة S التي عينت بالمعادلة (64) حيث الزمن موجود فقط في المراحل ϕ_a و ϕ_b . التعويض في المعادلة (72)، لأن المصفوفة s للسعات الثابتة تحقق المعادلة $HS + sW = 0$ تعطي:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \phi_a}{\partial t} = -W_a, \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} = -W_b.$$

ومن ثم $\phi_b = -2\pi i/h \cdot W_b t + \text{Const.}$ و $\phi_a = -2\pi i/h \cdot W_a t + \text{Const.}$ والحلول المميزة للمعادلة (70): $S(nk; a) = \text{Const.} \times s(nk; a) e^{-(2\pi i/h)W_a t}$: إلى آخره. السعة الاحتمالية العامة هي من المعادلة (70):

$$S(nk) = c_a s(nk; a) e^{-(2\pi i/h)W_a t} + c_b s(nk; b) e^{-(2\pi i/h)W_b t},$$

$$S(mi) = c_a s(mi; a) e^{-(2\pi i/h)W_a t} + c_b s(mi; b) e^{-(2\pi i/h)W_b t},$$

حيث c_b, c_a ثوابت يمكن تعيينها من الشروط المبدئية. ولأنه في هذه الحالة الشروط المبدئية هي $S(nk) = 1, S(mi) = 0$ وأن المحدد لقيم s هو الواحد، فنجد بسهولة:

$$S(nk) = s(mi; b) s(nk; a) e^{-(2\pi i/h)W_a t} - s(mi; a) s(nk; b) e^{-(2\pi i/h)W_b t},$$

$$S(mi) = s(mi; b) s(mi; b) \left[e^{-(2\pi i/h)W_a t} - e^{-(2\pi i/h)W_b t} \right].$$

في الحالة الخاصة للذرتين المتكافئتين حيث s لها الشكل (66)

$$S(nm) = \frac{1}{2} \left(e^{-(2\pi i/h)W_a t} + e^{-(2\pi i/h)W_b t} \right)$$

$$S(mn) = \frac{1}{2} \left(e^{-(2\pi i/h)W_a t} - e^{-(2\pi i/h)W_b t} \right).$$

ومنها نحصل على الاحتمالات التالية:

$$|S(nm)|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{h} (W_a - W_b) t \right]$$

$$|S(mn)|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h} (W_a - W_b) t \right].$$

هذه الصيغ تعطي احتمالات العثور على (nm) أو (mn) كدالة في الزمن. ولأن $W_a - W_b$ صغيرة في درجة مقدار طاقة التفاعل لهذه الذرات، فإن الاحتمالات تتغير ببطء شديد. بعد وقت قصير من القياس الأول (أي قيمة صغيرة للزمن t) فإنه من المحتمل للغاية أن نجد مرة أخرى التكوين (nm) . على أية حال إذا كان القياس الثاني بالضبط عند $t = (1/2)h(W_a - W_b)$

فإن النتيجة المؤكدة هي التكوين (mn). كل هذه الاعتبارات صالحة فقط عندما يظل النظام غير مضطرب فعلاً في الفترة ما بين قياسين. أي ما زال يحكم بالمعادلة (72). هذا الشرط طبعاً تافه جداً. بالأخص ذكر هنا لأنه ذو أهمية حاسمة بالنسبة لتوافق النظرية.

التفسير لمصفوفات التحويل على أنها دوال احتمال التي اختبرت تتيح خطة كاملة لتطبيق رياضيات ميكانيكا الكم لكل مسائل الفيزياء.

٦- المفهوم الجسيمي للإشعاع

النظرية الجسيمية للإشعاع معروفة جيداً في خطوطها العامة ولا تتطلب مناقشة مستفيضة عند هذه النقطة هي أساساً نظرية أينشتين للضوء الكمي تبعاً له يمكن النظر إلى الإشعاع على أنه فعل للجسيمات المتحركة دائماً بسرعة $quanta$ ولها سرعة الضوء c . الطاقة E والعزوم p يرتبطان بالمعادلة الأساسية:

$$E = cp, \quad (75)$$

واللون يعطي من العلاقة الكمية:

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

كم الضوء قد يظهر ويختفي ولهذا لا يميز صورة جسيمات المادة التي عددها مختلف. لا يوجد تفاعل بين كم الضوء المختلف (عند تجاهل الجاذبية) لكن التفاعل بين كمات الضوء والمادة هو المسئول عن ظواهر الامتصاص، الانبعاث والتشتت.

٧- إحصاءات الكم

نعتبر نظام من n من الجسيمات المتطابقة التي لا يمكن تمييز بعضها عن بعض (مثلاً الإلكترونات أو الفوتونات). للتبسيط سوف يفرض أن النظام

له قيم طيف مميزة منفصلة وأن التفاعل بين الجسيمات سوف يهمل في البداية. المسألة يمكن معالجتها أولاً بتعيين الحالات الممكنة والدوال المميزة المقابلة $\psi_{\alpha}(r)$ للجسيمات كل على حدة ثم اعتبار توزيع n من الجسيمات بين هذه الحالات. من أجل معالجة هذا التوزيع إحصائياً من الضروري تعريف ما يشكل حالة مميزة من النظام.

في الإحصاءات الكلاسيكية (إحصاءات بولتزمان) توزيع n من الجسيمات على n من الحالات المختلفة له الاحتمال النسبي $n!$ لأن كل تبديل n من الجسيمات يمثل تحقيقاً مستقلاً للتوزيع المعطى. في نظرية الكم هذا يعني أن كل توزيع n من الجسيمات بين n من الحالات المختلفة يقابل الحد المتحلل إلى $n!$ من الطيات في النظام الكلي. ونحصل على $n!$ من الدوال المميزة الخطية المستقلة المقابلة بإجراء $n!$ تبديلات للقيمة r_{β_k} مع α_i ثابتة في التعبير.

$$\psi_{\alpha_1}(r_{\beta_1}) \psi_{\alpha_2}(r_{\beta_2}) \cdots \psi_{\alpha_n}(r_{\beta_n}). \quad (76)$$

بدلاً من الدوال (76) لوصف مسألة n جسيم نستخدم أي نظام فيه $n!$ من الجاميع الخطية المستقلة. قدنا هذا إلى نظام للدوال، مثلاً عند محاولة لعلاج التفاعل بين الجسيمات وكأنه اضطراب. من بين $n!$ من الجاميع الخطية التي يتم الحصول عليها ينفرد اثنان منها بالتكوين البسيط:

$$\sum_{\text{All permutations}} \psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) \cdots \psi_{\alpha_n}(r_n), \quad (77)$$

والمحدد

$$|\psi_{\alpha_i}(r_k)| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (78)$$

الأول لا يتغير بتبادل أي جسيمين ويسمى «الدالة المميزة المتماثلة» للنظام، الثانية تغير فقط إشارتها عند هذا التبادل وتسمى «دالة مميزة غير متماثلة».

إذا كان المفترض أن ψ_α دوال مقاسة (لها المقياس واحد) ومن ثم يظهر أن الدوال المميزة (77) و(78) للنظام الكلي أيضاً مقاسه إذا ضربت بالعدد $\sqrt{1/n!}$.

هذه العلاقات شرحت بوضوح في أبسط حالة عند $n = 2$. مقابل لجسيم واحد في الحالة α_1 والآخر في الحالة α_2 يوجد حد ثنائي التحلل وله دالتان مميزتان.

$$\psi_s(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) + \psi_{\alpha_1}(r_2) \psi_{\alpha_2}(r_1)],$$

$$\psi_\alpha(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) - \psi_{\alpha_1}(r_2) \psi_{\alpha_2}(r_1)].$$

يظهر أولاً بوضوح أنه لا يوجد توافق بينية (داخلية) بين المتماثل وغير المتماثل من الدوال المميزة. احتمال وجود هذا الانتقال يعطي دائماً بواسطة تكامل على الصورة.

$$\int f(1,2) \psi_s(1,2) \psi_\alpha(1,2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (79)$$

حيث $f(1,2)$ دالة لا تتغير عند تبادل الجسيمات، لأن الجسيمين لا يمكن تمييزهما. الآن إذا تبادل الإلكترونان في (79) فإن قيمة التكامل لا تتغير، لأنه لا يتغير إلا بتغير متغير التكامل وإشارته. وعلى الجانب الآخر إشارة $\psi_\alpha(1,2)$ تعكس بينما جميع المقادير المتكاملة تبقى كما هي. ومن ثم (79) يجب أن تتلاشى. تحقيق رياضي أكثر دقة يعتمد على نظرية تمثيل المجموعات يوضح أن هذه النتيجة يجب تعميمها كالآتي:

حدود النظام المكون من n جسيم متساوٍ يمكن تقسيمه دائماً إلى أنظمة جزئية بطريقة ما بحيث الحدود المنتمية إلى نظام جزئي معين تتوافق معاً. بصفة خاصة سيكون هناك دائماً نظامان جزئيان في أحدهما حيث الدوال المميزة متماثلة بينما في الآخر الدوال المميزة غير مماثلة.

هذه النتيجة ما تزال صالحة لأي تفاعل بين الجسيمات مادام التفاعل بين الجسيمات دالة متماتلة لإحداثياتها.

الحقيقة أن التوافق الداخلي لا يحدث بين حدين لنظامين مختلفين ترك الإمكانية مفتوحة لتقديم مزيد من (الافتراضات) التي تبعد الجميع لكن واحداً فقط بين هذه الأنظمة من وجهة النظر الفيزيائية.

نعتبر مثلاً، نظام الحد المتماثل وحده. توزيع معين للجسيمات فيما بين الحالات المختلفة للجسيمات المنفردة (مرة أخرى مع إهمال التفاعل) يقابل في نظام الحد هذا لدالة مميزة منفردة فقط.

الإمكانيات التي مثلت في نظام الحد المتماثل تقابل عندئذٍ لهذه الحالات المتميزة في إحصاءات بوز-أينشتين.^{١٠}

في نظام الحد المكون من دوال مميزة غير متماتلة، على الجانب الآخر، أي دالة تقابل اثنين من الجسيمات في نفس الحالة يجب أن تتلاشى. هذا تعبير في نظرية (Pauli) للكَم استبعاداً للمدارات المتكافئة التي تنطبق على الإلكترونات والبروتونات. اختيار نظام حد غير متماتل يقابل استخدام إحصاءات (Fermi-Dirac^{١١}).

من ثم تفرد الإحصاءات الكمية نظام حد واحد من حد متعدد الطيات الممكنة لمسألة n من الجسيمات، إما من دوال متماتلة أو غير متماتلة مميزة، لأن المعنى الفيزيائي الوحيد، أن كل حد في متعدد الطيات المختار يمثل حالة مختلفة من النظام الفيزيائي في n من الجسيمات. الحالة الأولى تقابل إحصاءات بوز-أينشتين والتي تستخدم لكلمات quanta الضوء، الحالة الثانية تقابل إحصاءات (بولي-فيرمي-ديراك). من المهم تذكر أن هذه الصيغة صحيحة لأي تفاعل للجسيمات.

عند تطبيق مبدأ الاستبعاد «لباولي» للإلكترونات أو البروتونات يجب ألا ننسى أن r_k في $\psi_\alpha(r_k)$ تمثل ليس فقط الإحداثيات الثلاثة في الفراغ للجسيم k بل أيضاً متغيراً رابعاً يصف الدوران والذي له فقط القيمتان $+1/2$ و $-1/2$.

صيغة الإحصاءات الكمية في الصورة الموجية سوف تعالج في فقرة ١٠.

٨- المفهوم الموجي للمادة والإشعاع: النظرية الكلاسيكية

النظرية الموجية الكلاسيكية هي نظرية (دي بروي) الموجية للمواد والموجات الكهرومغناطيسية للإشعاع. في هذا الجزء يعالج مبدئياً هذه الموجات المرتبطة بالإلكترون (موجات البروتون يمكن معالجتها بنفس الطريقة) وأيضاً سيتم النظر إلى موجات الضوء باختصار. لن تبذل محاولة لتشمل التأثيرات النسبية، ومن ثم من المنطقي معالجة قوى الكهرباء الساكنة فقط وإهمال الظواهر المغناطيسية والتباطؤية.

المعادلة الموجية الصحيحة للمادة الموجية اكتشفت بواسطة شرودنجر والأبسط أنه حصل عليها من معادلة التحويل (73) في بند فقرة ٥. هذه المعادلة العامة لشرودنجر^{١٤} (73)، لا يمكن أن ينظر إليها نفسها كمعادلة موجية، لأنها معادلة في فراغ إحداثيات له $3N$ بعد لعدد N من الجسيمات، على أية حال لعدد $N = 1$ هذا الفراغ يختصر للفراغ الثلاثي العادي، ومن ثم فمن المعقول محاولة النظر إلى المعادلة في هذه الحالة الخاصة وكأنها معادلة الفراغ والزمن (الكلاسيكي) لموجات المادة. دالة التحويل $\psi(xyz)$ تعتبر عندئذ وكأنها حقل الثوابت Field Scalar.

يتكون الهاميلتونيان Hamiltonian الكامل لجسيم إلكتروني واحد من طاقة حركة $E_{kin} = (1/2\mu)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ وطاقة وضع $E_{pot} = -eV$ حيث e و μ هي الشحنة والكتلة للإلكترون على الترتيب وأن V هي طاقة الوضع الكهربائية الساكنة. من ثم المعادلة (73) في هذه الحالة تختصر إلى:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla^2 \psi + eV\psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (80)$$

حيث ∇^2 هي مؤثر لابلاسيان laplacian $(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ المعادلة المرافقة المركبة:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla^2 \psi^* + eV\psi^* + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = 0 \quad (81)$$

محتواه ضمناً في المعادلة (80)

النظرية الرياضية لهذه المعادلات يمكن النظر إليها كنظرية كلاسيكية لموجات المادة، وإن كان بالطبع التفسير الرياضي يختلف أساساً عنه في الجزء السابق. الكميات الداخلة في هذه المعادلات يمكن تصورها جميعاً بحدود في الفراغ والزمن تماماً كالكميات في معادلات ماكسويل، لأنها جميعاً دوال في المتغيرات الأربعة x, y, z, t فقط.

النظرية الموجية لا تعتبر الإلكترونات e و μ مجرد ثوابت عالمية للمعادلة الموجية. بالرغم من أن المعادلات (80)، (81) تم الحصول عليها من مسألة الإلكترون الواحد في النظرية الجسيمية، فهي الآن لا تقتصر بأي وسيلة على «تطبيق لإلكترون واحد فقط» لأن هذه العبارة لا معنى لها في النظرية الموجية. بالعكس فإن لها تعميماً حتى تعني أيضاً (للموجات سالبة الكهربية). من هذه الملاحظة يتكون مباشرة — (عكس نظرية الكم لمسألة الإلكترون الواحد) أن V لا تمثل ببساطة الجهد للقوى الخارجية لكن تحتوي أيضاً جهد موجات المادة نفسها، أي أن يأخذ في الاعتبار رد فعل توزيع الشحنات لجزء على الجزء الآخر. هذه النظرية ستكون عاجزة عن تمثيل الظواهر الطبيعية الذرية مثل نظرية ماكسويل. وقيمتها على وجه الحصر أنها ترتبط مع نظرية الكم للموجات بنفس طريقة ارتباط الميكانيكا الكلاسيكية لنظرية الكم للجسيمات.

سوف تعالج، كمثال أول، حالة السعة الموجية الصغيرة جداً، حيث كثافة المادة منخفضة جداً. سوف يفرض أن الجهد الخارجي أيضاً صفر، حتى إن V تتلاشى. للتقريب المطلوب، المعادلة (80) تصبح:

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (82)$$

ولها الحل:

$$\psi = e^{(2\pi i/h)(p_x x + p_y y + p_z z - Et)},$$

حيث:

$$E = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2\mu} p^2.$$

هذه لها شكل الموجات المستوية، اتجاه الموجة العمودي يعطي بواسطة p_x ، p_y ، p_z وطول الموجة والتردد هما:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad v = \frac{E}{h}. \quad (83)$$

السرعة المرحلية v_ϕ للموجات هي:

$$v_\phi = \frac{E}{p} = \frac{p}{2\mu}, \quad (84)$$

بينما سرعة المجموعة v_g يمكن حسابها من المبدأ الأساسي للضوء ليكون:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{\mu} = \frac{h}{\lambda\mu}. \quad (85)$$

وفقاً لنظرية (دي بروي)^{١٠} هذه هي المعادلات التي تتحكم في التداخل لموجات المادة ذات الكثافة المنخفضة جداً. العلاقة بين سرعة المجموعة وطول الموجة يسمح بارتباط طول الموجة مع الحركة المركبة للكهرباء السالبة دون أي تعديل لصورة الجسيم. نظرية (دي بروي) هذه تعطي حساباً نوعياً بسيطاً لتجارب Davisson, Gremer, Thomson, Rupp، والآخريين. هذا يشابه بالضبط نجاح الميكانيكا الكلاسيكية في شرح صور Wilson، من انحراف الأشعة عن طريق الكاثود في المجالات الكهربائية إلى آخره. ومع ذلك ينظر إلى هذه الإنجازات للنظريات الكلاسيكية كبرهان فقط على التماثل بين النظريات الكلاسيكية ونظريات الكم، بمعنى مبدأ التقابل. من أجل الإجابة عن جميع الأسئلة الكمية يجب النداء لعمل نظرية كم دقيقة.

قبل المرور إلى نظرية الكم للموجات فمن الضروري توضيح أكثر بعض الشيء للنظرية الكلاسيكية للموجات. لهذا الغرض نعود مرة أخرى إلى

معادلة الموجة (80) التي لم تقتصر على انخفاض كثافة المادة، ووضعت الافتراضات التالية لتفسير الدالة الموجية ψ :

$$\left. \begin{aligned} \text{كثافة الشحنة} : \rho &= -e\psi^*\psi, \\ \text{كثافة التيار} : \sigma &= -\frac{eh}{4\pi i\mu}(\psi^*\nabla\psi - \psi^*\nabla\psi^*), \\ \text{كثافة الطاقة} : u &= \frac{h^2}{8\pi^2\mu}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

التحقيق الجاد لهذه الافتراضات يمكن إيجاده فقط في التطورات الأخيرة لنظرية الكم الموجية. ومع ذلك فمن المعقول عند هذه المرحلة تقديم المقادير ρ و σ و u التي تطيع (بالرجوع للمعادلات (80)، (82)) قوانين الحفظ التالية من النوع المطلوب لأي نظرية كلاسيكية:

$$\text{حفظ الشحنة} : \frac{d}{dt} \int \rho dv = 0, \quad (87a)$$

$$\text{حفظ العزم} : \frac{d}{dt} \int \sigma dv = -e \int \nabla V \psi^* \psi dv, \quad (87b)$$

$$\text{حفظ الطاقة} : \frac{d}{dt} \int u dv = \int eV \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dv. \quad (87c)$$

في هذه المعادلات dv هو عنصر الحجم والتكامل على كل الفراغ. ومن المفترض أن ψ تتلاشى على كرة لا نهائية بحيث إنه بتطبيق نظرية Green فإن التكامل السطحي يندعم. لاستنتاج (87a) نضرب المعادلة (80) في ψ^* والمعادلة (81) في ψ ونطرح المعادلتين الناتجتين، ثم تكامل على كل الفراغ ونستخدم نظرية جرين. لاستنتاج (87b) نضرب المعادلة (80) في $\partial\psi^*/\partial x$ ونفاضل المعادلة (81) بالنسبة إلى x ونضرب في ψ ثم نطرح ونكامل كما سبق. أخيراً (87c) تستنتج بنفس الطريقة مثل (87a) إلا أن المعادلات تجمع معاً بدلاً من الطرح.

بجانب الموجات ذات الكهربية السالبة توجد شحنات أخرى في الفراغ، مثل نواة الذرة، والمكثفات المشحونة ... إلى آخره. كثافة هذه الشحنات

نرمز لها ρ_0 . الجهد الكهربائي الكلي يعين باستخدام معادلة بواسون

$$\nabla \cdot E = 4\pi(\rho + \rho_0) \text{ أو}$$

$$\nabla^2 V = -4\pi(\rho + \rho_0). \quad (88)$$

من أجل تطوير نظرية الكم للمجالات الموجية في الجزء التالي، يجب ملاحظة أن المعادلات (80)، (81)، (82)، يمكن استنتاجها جميعاً من مبدأ تغير واحد. دالة لاجرانج الصحيحة تكون:

$$L = \left. \begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - \frac{\hbar}{4\pi i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ & + eV\psi\psi^* - \rho_0 V + \frac{1}{8\pi} \nabla V \cdot \nabla V, \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

لأنه بتغير ψ ، ψ^* يعطي الشرط

$$\iint L \, dv \, dt = \text{Extremum}$$

(حيث Extremum = نهاية طرفية) المعادلات (80) و(81) بالترتيب، وبتغير V تعطي المعادلة (88).

الطاقة الكلية للنظام تتكون من طاقة موجات المادة والموجات الكهرومغناطيسية للمجال. ومن ثم الكثافة الكاملة للطاقة \mathcal{H} تعطي بالمعادلة:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \frac{1}{8\pi} \nabla V \cdot \nabla V, \quad (90)$$

وقانون الحفظ:

$$H = \int \mathcal{H} \, dv = \text{Const.} \quad (91)$$

تم إثباتها، عند ρ_0 مستقلة عن الزمن. البرهان كما يلي:

من المعادلات (90)، (88)، (87c)

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \int dv \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} V \frac{\partial}{\partial t} (\nabla V \cdot \nabla V) \right], \\ &= \int dv \left[\frac{\partial u}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial t} (e\psi\psi^*) \right], \\ &= 0.\end{aligned}$$

هذا يتفق مع نظرية الفراغ والزمن، المبنية وفقاً لنموذج نظرية المجال الكلاسيكية ولا تتضمن بعد عنصراً جسيمياً واحداً. وهذا يتضح قبل كل شيء من حقيقة أن الشحنة الكلية للنظام:

$$\int \rho dv = -e \int \psi^* \psi dv \quad (92)$$

يمكن أن تأخذ أي قيمة مرغوبة، وليس فقط القيم: $-e, -2e, -3e, \dots$ كما يطلب من أي نظرية صحيحة للنظم الذرية (أو محددة الكم). علاوة على ذلك، الطاقة الكلية والترددات المميزة يمكن أن تأخذ أي قيمة، لأن المعادلات التفاضلية غير خطية ولهذا تعتمد الترددات المميزة على سعات ψ . على الرغم من هذه العيوب (التي هي من أي نظرية كلاسيكية) فالنظرية الحالية يمكن استخدامها لحساب الظواهر الذرية بطريقة مماثلة بدقة لاستخدام بور، سومرفيلد في تطبيق النظرية الجسيمية الكلاسيكية. بالضبط كما قدم هؤلاء المؤلفين الشروط $\int p_k dq_k = n_k h$ في الميكانيكا الكلاسيكية، استطاع هارترتي (Hartree)¹¹ إعطاء حساب تقريبي للأطياف الذرية بوضع شروط الكم:

$$\int \psi_k^* \psi_k dv = n_k \quad (93)$$

في نظرية المجال الحالية. المقدار n_k هو عدد صحيح، المؤشر اللاحق k يشير إلى الاهتزاز المميز للنظام. استطاع Hartree هارترتي الحصول على نتائج مرضية فقط عند إهمال التغيرات الزمنية الدورية في V ، والذي نتج من الطبيعة الدورية للدالة ψ . هذا يشابه الصعوبات التي تواجهها نظرية المجال لبور-سومر. ومن السمات المميزة لنظرية المجال هذه صعوبة

المعالجة رياضياً، تماماً مثل الميكانيكا الكلاسيكية. وبكل النسب هي أكثر صعوبة من نظرية الكم سواء للجسيمات أو الموجات. ولعله من غير الضروري الدخول في سرد مفصل للنظرية الكلاسيكية للإشعاع حيث إنها النظرية المعروفة جيداً لماكسويل. وهي لا تحتوي أي عنصر كمي على الإطلاق، كما تشهد حقيقة أن الطاقة $\int (E^2 + H^2) dv$ دائمة التغير. مرة أخرى يمكن تجنب الصعوبة باستخدام شروط الكم مثل شروط هارترتي التي جعلت من الممكن فقط التغير في الطاقة غير المستمرة مقداره $h\nu$. ومع ذلك هذا لن يقود إلى نظرية كم للمجال.

٩- نظرية الكم لمجالات الموجة^{١٧}

الجهاز الرياضي الضروري لنظرية الكم لمجالات الموجة يمكن وصفه في شكل يشابه تماماً ذلك الخاص بميكانيكا الكم للجسيمات، بشرط أن نظرية الموجة الكلاسيكية وضعت أولاً في شكل مشابه للهاميلتونيان Hamiltonian للميكانيكا الكلاسيكية. هذا الجزء يعالج المسألة العامة لنظرية الموجة الكلاسيكية التي يمكن استنتاجها من مبدأ التباين Variation Principle. دالة لاجرانج لمبدأ التباين هذا يمكن أن تحتوي على عدد من دوال الموجية [فقرة ٨] مشتقاتها الأولى بالنسبة للفراغ $(\partial\psi_\alpha/\partial x_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) مثل ψ و ψ^* و V من البند للمتغيرات x, y, z على الترتيب. ومشتقاتها الأولى بالنسبة للزمن $\partial\psi_\alpha/\partial t = \dot{\psi}_\alpha$. مبدأ التباين يصبح:

$$\iint L\left(\psi_\alpha, \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha\right) dv dt = \text{Extremum}, \quad (94)$$

وأن المعادلات الموجية هي معادلات أويلر المقابلة:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial (\partial\psi_\alpha/\partial x_i)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots). \quad (95)$$

يمكن استنتاج الميكانيكا الكلاسيكية لنظام من الجسيمات من مبدأ التباين لهاميلتون:

$$\int L(q_k, \dot{q}_k) dt = \text{Extremum.} \quad (96)$$

مبدأ التباين (94) للمجال المتصل يمكن جعله مشابهًا شكليًا لمبدأ التباين (96) لمجموعة منفصلة من الجسيمات بتقديم المقدار:

$$\bar{L} = \int L\left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \psi_\alpha\right) dv, \quad (97)$$

ثم كتابة (94) على الشكل:

$$\int \bar{L}\left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \psi_\alpha\right) dt = \text{Extremum.} \quad (98)$$

الآن بينما $L(q_k, \dot{q}_k)$ يعتمد على q_k لكل قيم المؤشر k فإن $\bar{L}(\psi_\alpha, (\partial \psi_\alpha / \partial x_i), \psi_\alpha)$ يحدد بقيم ψ_α و ψ_α لجميع نقاط الفراغ. ومن ثم فإن التشابه بين المقدارين يكون تامًا إذا كانت النقط P في الفراغ ينظر إليها كمؤشرات للدالة الموجية. الدالة الموجية الكاملة يمكن النظر إليها كتركيب للمقادير $\psi_\alpha(P)$ معتمدًا على نوعين من المؤشرات: مجموعة منفصلة α ومجموعة متغيرات متصلة P . (P طبقًا تأخذ قيم المؤشرات الثلاثة x, y, z المكانية).

معادلات أويلر (95) يمكن التعبير عنها الآن بحدود لاجرانج \bar{L} ، وهو يشابه لاجرانج لنظام من الجسيمات. مشابهًا للمشتقة العادية $(\partial / \partial q_k)L(q_i, \dot{q}_i)$ والتي يمكن كتابتها:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q=0} \frac{L(q_i + \delta_{ik}\Delta q, \dot{q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i)}{\Delta q},$$

نعرف المشتقة كالاتي:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta \bar{L} [\psi_\beta (P'), \partial \psi_\beta (P') / \partial x_i, \psi_\beta (P')]}{\delta \psi_\alpha (P)} \\ & = \lim_{\Delta \psi = 0} \frac{1}{\Delta \psi} \left\{ \bar{L} \left[\psi_\beta (P') + \delta_{\alpha\beta} \delta (P - P') \Delta \psi (P'), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\psi_\beta (P') + \delta_{\alpha\beta} \delta (P - P') \Delta \psi (P'), \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \psi_\beta (P') \right] \right] \right. \\ & \quad \left. \left. - L \left[\psi_\beta (P'), \frac{\partial \psi_\beta (P')}{\partial x_i}, \psi_\beta (P') \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

الرمز $\delta (P - P')$ يعرف دالة مشابهة لدالة ديراك δ (انظر فقرة ٢) ولها الخواص:

$$\text{and } \left. \begin{aligned} & \delta (P - P') = 0 \quad \text{when } P \neq P', \\ & \int \delta (P - P') dv = 1 \text{ or } 0, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

تبعاً لكون حجم التكامل يحتوي أو لا على النقطة P' . من التعريف (97) \bar{L} يلاحظ بسهولة أن:

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_\alpha / \partial x_i)}. \quad (101)$$

من الواضح أن:

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha},$$

معادلات أويلر تصبح:

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{\psi}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_\alpha} = 0, \quad (102)$$

مشابهة تمامًا لمعادلات لاجرانج للميكانيكا الكلاسيكية. الانتقال من لاجرانج إلى شكل هاميلتون في ميكانيكا الجسيم الكلاسيكية نحصل عليها بتقديم الهاميلتون:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L, \quad (103)$$

حيث $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ فتأخذ المعادلات شكل الهاميلتون (1). نفس الوسيلة تستخدم الآن للمعادلات الموجية (95). الدالة المرافقة Π_α للدالة الموجية ψ_α تعرف بالعلاقة:

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}, \quad (104)$$

والهاميلتون يصبح بالمثل للمعادلة (103)

$$\bar{H} = \int \sum_\alpha \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha dv - \bar{L}. \quad (105)$$

بالمثل للعلاقة بين L و \bar{L} :

$$\bar{H} = \int H dv \quad (106)$$

إذا كان:

$$H = \sum_\alpha \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - L. \quad (107)$$

المعادلات الموجية (95) تأخذ الآن شكل الهاميلتونيان:

$$\dot{\psi}_\alpha = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_\alpha}, \quad \dot{\Pi}_\alpha = -\frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_\alpha}. \quad (108)$$

قوانين الحفظ يمكن استنتاجها كما في ميكانيكا الجسيم. مباشرة من (108) يتلو قانون حفظ الطاقة:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0, \quad (109)$$

بينما المعادلات:

$$\frac{d}{dt} \int \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i} dv = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (110)$$

تعبر عن قانون حفظ العزم ويتكون من (108)، (101) لأن:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dv \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i} &= \int dv \left[\Pi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_{\alpha}} - \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_{\alpha}} \right], \\ &= - \int dv \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial \Pi_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_{\alpha}} + \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_{\alpha}} \right], \\ &= - \int dv \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

في الحالتين يفترض أن H لا تحتوي على دوال للفراغ والزمن غير الدالتين $\psi_{\alpha}, \Pi_{\alpha}$ ومشتقاتهما.

الانتقال من النظرية الكلاسيكية إلى نظرية الكم يمكن أن يكتمل دون صعوبة بالتشابه للطريقة في فقرة ١. هناك كان التعويض عن الإحداثيات بالمتغيرات وبالتالي هنا الدوال الموجية يمكن الاستعاضة عنها بالمتغيرات غير التبادلية، التي تمثل كمصفوفات في فراغ هيلبرت مناسب. (هذه المقادير سميت بواسطة ديراك بأعداد q).

يجب أن يضاف للمعادلات التفاضلية (108) العلاقات التبادلية المشابهة للعلاقة (15):

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\alpha}(P) \psi_{\beta}(P') - \psi_{\beta}(P') \Pi_{\alpha}(P) &= \delta_{\alpha\beta} (P - P') \frac{h}{2\pi i}, \\ \Pi_{\alpha}(P) \Pi_{\beta}(P') - \Pi_{\beta}(P') \Pi_{\alpha}(P) &= 0, \\ \psi_{\alpha}(P) \psi_{\beta}(P') - \psi_{\beta}(P') \psi_{\alpha}(P) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

الإحداثيات المكانية الزمنية x, y, z, t في نظرية الكم هذه للمجالات الموجية تعتبر بارامترات (مثل الزمن في نظرية الجسيمات). أي أنها أعداد بالمعنى العادي (تسمى عناصر c بواسطة ديراك) وهي تتبادل معاً ومع جميع المقادير الأخرى. قوانين الحفظ

$$\bar{H} = \text{Const.}, \quad \int \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i} dv = \text{Const.} \quad (112)$$

تظل صالحة كما تم برهانه بمساعدة العلاقة (111). أبسط طريقة للعلاج الرياضي للمسألة الموجية المعروفة بالمعادلات (108)، و(111) هي فك الدوال الموجية باختيار مناسب لمجموعة من الدوال العمودية $u_{\alpha}^r(P)$:

$$\psi_{\alpha} = \sum_r a_r(t) u_{\alpha}^r(P), \quad \Pi_{\alpha} \sum_r b_r(t) u_{\alpha}^r(P). \quad (113)$$

حيث $u_{\alpha}^r(P)$ هي أعداد c العادية والمعاملات a_r, b_r يجب أن ينظر إليها على أنها أعداد q المعتمدة على الزمن.

حتى تحقق ψ_{α} و Π_{α} عند كتابتها بهذا الشكل العلاقات التبادلية (111) فالمعاملات a_r, b_r يجب أن تحقق العلاقات التبادلية التالية:

$$\left. \begin{aligned} b_s a_r - a_r b_s &= \frac{h}{2\pi i} \delta_{rs}, \\ a_s a_r - a_r a_s &= 0, \\ b_s b_r - b_r b_s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

وهي تشابه في الشكل المعادلات (15). وهذا تم اثباته فعلاً بالتعويض عن المفكوك (113) في المعادلة (111)، وضرب الطرفين بالمقدار $u_{\alpha}^s(P)u_{\beta}^r(P')$ والتكامل على P و P' والجمع على α و β . وفي التكامل يجب استخدام علاقة التعامد للدالة u_{α}^r :

$$\int dv_P \sum_{\alpha} u_{\alpha}^r(P) u_{\alpha}^s(P) = \delta_{rs}.$$

الهاميلتونيان H ومعادلات الحركة (108) يمكن التعبير عنها بحدود من a_r و b_r . الطريقة السابق وصفها لحل مسألة ديناميكا الكم هي متاحة هنا — في الحقيقة — الفرق الوحيد بين نظرية الكم للمجالات الموجية ونظرية الكم للجسيمات أنه في الأولى عدد المتغيرات لانتهائي بينما في الثانية العدد نهائي (محدد).

١٠- تطبيق للموجات ذات الشحنة السالبة

أسلوب الجزء الأخير سيطبق الآن للموجات ذات الشحنات السالبة التي عولجت في فقرة ٨. لاجرانج الكلاسيكي هو إذن:

$$L = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \frac{1}{8\pi} \nabla V \cdot \nabla V + eV\psi^*\psi - \rho_0 V - \frac{\hbar}{4\pi i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right).$$

مقابلاً لتقسيم شدة الشحنة إلى شحنة خارجية (ρ_0) وشحنة داخلية (ρ) فإن الجهد V يمكن كتابته: $V = V_0 + V_1$ حيث:

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi\rho_0, \quad \nabla^2 V_1 = -4\pi e\psi^*\psi. \quad (115)$$

اللاجرانج السابق يمكن تعديله بصورة مريحة أكثر بإضافة المشتقات التامة $(\hbar/4\pi i)(\partial/\partial t)(\psi^*\psi)$ و $(1/4\pi)\nabla \cdot (V_1\nabla V_0)$ ونبذ الحدود المحتواة فقط على الدالة المعروفة ρ_0 .

هذا لن يغير مسألة التباين وفي اللاجرانج:

$$L = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - \frac{\hbar}{4\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* + \frac{1}{8\pi} \nabla V_1 \cdot \nabla V_1 + e(V_0 + V_1) \psi^* \psi \quad (116)$$

فالدوال الناتجة ψ ، ψ^* و V_1 هي فقط التي تتغير.

هناك صعوبة طفيفة تنشأ لأن الحقيقة أن مشتقة V_1 بالنسبة للزمن لا توجد في (116) ومن ثم من المستحيل تعريف العلاقات التبادلية (111)، ولأن مرافق V_1 المعرف بالمعادلة (104) سوف يتلاشى. العضلة يمكن تجنبها بسهولة بعدم النظر إلى V_1 كدالة موجية مستقلة، ولكن معالجة المعادلة الناتجة عن التباين في V_1 كشرط ثانوي، بمساعدته V_1 يمكن التعبير عنها كدالة في ψ و ψ^* . ولأن المعادلة الناتجة من تباين V_1 هي $\nabla^2 V_1 = 4\pi e \psi^* \psi$ فإن V_1 معطاة بحدود في ψ ، ψ^* بالحل المعروف جيداً للمعادلة:

$$V(P) = -e \int G(PP') \psi^*(P') \psi(P') dv_{P'}, \quad (117)$$

حيث $G(PP')$ هي دالة جرين (عادة هي $1/r_{PP'}$) للمنطقة حيث تحدث الموجات. وبتعويض ذلك في معادلة لاجرانج (116) — وبعض التعديلات الطفيفة التي تحتوي مرة أخرى إضافة المشتقات التامة — تكون النتيجة:

$$L = \left. \begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* - eV_0 \psi^* \psi \\ & - \frac{e^2}{2} \int dv_{P'} \psi^*(P) \psi(P) \psi^*(P') \psi(P') G(PP'), \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

العزوم المرافقة للدالة ψ هي (انظر معادلة (104)):

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\psi}^*,$$

ومن ثم يكون الهاميلتون هو:

$$H = -\frac{h}{2\pi i} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - L,$$

ويعطي:

$$\bar{H} = \int dv \left[\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - eV_0 \psi^* \psi \right] + \frac{e^2}{2} \iint dv_P dv_{P'} G(PP') \psi^*(P) \psi(P) \psi^*(P') \psi(P'). \quad (119)$$

من هذه الهاميلتونيان الكلاسيكية الشكل يمكن الانتقال إلى نظرية الكم كما حدث في فقرة ٩ بتقديم العلاقات التبادلية:

$$\left. \begin{aligned} \psi(P) \psi^*(P') - \psi^*(P') \psi(P) &= \delta(P - P'), \\ \psi(P) \psi(P') - \psi(P') \psi(P) &= 0, \\ \psi^*(P) \psi^*(P') - \psi^*(P') \psi^*(P) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

يمكن أخذ الهاميلتونيان مرة أخرى من خلال التعبير (119) الخاص بالنظرية الكلاسيكية. على أية، ترتيب العوامل — وهو حالياً مهم — لا يعين بهذه الطريقة، في الحقيقة الشكل الصحيح — حتى الآن — ما يحتويه ترتيب العوامل يحدد فقط وضعياً. وقد وجد جوردان Jordan، كلاين Klein^{١٨} أن الهاميلتونيان المناسب لمادة الموجات هو:

$$\bar{H} = \int dv \left[\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - eV_0 \psi^* \psi \right] + \frac{e^2}{2} \iint dv_P dv_{P'} G(PP') \psi^*(P) \psi^*(P') \psi(P) \psi(P'). \quad (121)$$

وينبغي ملاحظة أن تعريف ψ^* كدالة مرافقة ψ يتطلب بعض التعديلات عندما ψ تكون عدد q . إذا أعطيت ψ كدالة في المصفوفة الهرميتية، فإن ψ^* يحصل عليها بإبدال i بالعدد $-i$ وكذلك بتبديل ترتيب المعاملات، مثلاً:

$$(pq)^* = q^* p^*.$$

في نظرية الكم هذه لمادة الموجات الشحنة الكلية

$$-e \int dv \psi^* \psi.$$

مرة أخرى ثابتة في الزمن، كما تم إثباته بتوضيح أنه يتبادل مع \bar{H} . كما هو في معظم الحالات، القيم المميزة هي مضاعف صحيح للقيمة $-e$. هذا يمكن توضيحه بالطريقة الآتية. كما في فقرة ٩ إذا وضعنا:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sum_r a_r u_r(P), & \psi^* &= \sum_r a_r^* u_r(P), \\ \int u_r u_s dv &= \delta_{rs}, \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

حيث a_r و a_r^* يحققان العلاقات التبادلية:

$$\left. \begin{aligned} a_r a_s^* - a_s^* a_r &= \delta_{rs}, \\ a_r a_s - a_s a_r &= 0, \\ a_r^* a_s^* - a_s^* a_r^* &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

مشابه للمعادلات (114). العلاقات التبادلية السابقة يمكن تحقيقها بوضع:

$$a_r = e^{-(2\pi i/h)\theta_r} N_r^{1/2}, \quad a_r^* = N_r^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_r}, \quad (124)$$

حيث N_r و θ_r موثرات هيرميتية تحقق العلاقات التبادلية:

$$\theta_r N_s - N_s \theta_r = \delta_{rs}.$$

ومن ثم يمكن إثبات أن:

$$e^{-(2\pi i/h)\theta_r} f(N_r) = f(N_r + 1) e^{-(2\pi i/h)\theta_r}, \quad (125)$$

وأن القيم المميزة للمؤثر N_r أعداد صحيحة موجبة. وبذلك يتلو من المعادلة (122) أن:

$$\begin{aligned} e \int dv \psi^* \psi &= e \int dv \sum_{r,s} a_r^* a_s u_r u_s \\ &= e \sum_{r,s} a_r^* a_s = e \sum_r N_r. \end{aligned}$$

وطبقاً لنظرية الكم لموجات المادة فالموجات تعنى بوجود الإلكترون. في الوقت نفسه — من الواضح أن (الشروط الكمية) لهارترى (93) المشابهة بمعنى مبدأ التقابل — لعلاقات التبادل (123). لأن $\sum N_r$ هو ثابت التكامل لمعادلات الحركة. من الممكن اعتبار الحالات الثابتة منفصلة وهذا المقدار له القيمة العددية N . (يجب ملاحظة أن $\sum N_r$ مقدار ثابت حتى عند V_0 تعتمد على الزمن.) قد أثبت بواسطة جوردان وكلاين^{١٦} أن الحلول للمسألة الموجية باستخدام الهامليتونيان (119) التي لها هذا الشرط متحقق هي — رياضياً وفيزيائياً — تكافئ الحلول لمسألة N إلكترون من نظرية الجسيمات، أي حلول معادلة شرودنجر (47). بيد أنها لا تتطابق مع كل الحلول لهذه المعادلة، لكن فقط الحلول الممكنة حيث دالة التحويل ψ متماثلة في إحداثيات الإلكترونات. هذه الحلول نفسها تكون نظاماً مغلقاً، وهو النظام الذي يحقق إحصاءات بوز-أينشتين. نظرية الكم في شأن الموجات (خصوصاً العلاقات التبادلية (111)) تتطلب إحصاءات بوز-أينشتين لصورة الجسيمات المقابلة.

العلاقات التبادلية (111) على أية حال هي الممكنة الوحيدة من كثير. مجموعة أخرى مبررة متساوية يحصل عليها بتبديل العلامة — بالعلامة +

حتى تكون الدوال الموجية محققة للمعادلات

$$\left. \begin{aligned} \psi(P) \psi^*(P') + \psi^*(P') \psi(P) &= \delta(P - P'), \\ \psi(P) \psi(P') + \psi(P') \psi(P) &= 0, \\ \psi^*(P) \psi^*(P') + \psi^*(P') \psi^*(P) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

وفقاً لجوردان وجنر،^{٢٠} نظرية الكم للموجات المؤسسة على علاقات التبادل هذه تكافئ الحلول غير التماثلية لمعادلة شرودنجر. أي أن هذه العلاقات تقود إلى مبدأ الاستبعاد لبولي وإحصاءات فيرمي ديراك المقابلة.

١١- برهان التكافؤ الرياضي بين نظرية الكم للجسيمات والموجات

مشكلة نظرية الكم تتركز على حقيقة أن صورة الجسيم وصورة الموجة هما وجهان مختلفان لنفس الحقيقة الفيزيائية. على الرغم من أن هذه المشكلة ذات طابع فيزيائي بحت. فمن المريح إيجاد نظير لهذه ازدواجية في الجهاز الرياضي للنظرية. التشابه يتمثل في حقيقة أن مجموعة واحدة من المعادلات الرياضية يمكن تفسيرها بحدود لكل من الصورتين. والدليل على هذا القول أنه يمكن اعتباره عامّاً دون النظر إلى شكل الهاميلتونيان المعين. معادلة شرودنجر لصورة الجسيم لعدد N من الجسيمات المتكافئة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\left\{ \sum_{n=1}^N O^n + \sum_{n>m}^N O^{nm} + \dots + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \varphi(x_1, \dots, x_N) = 0 \quad (127)$$

حيث O^n هو مؤثر فقط على إحداثيات الفراغ x_n للجسيم النوني. O^{nm} هو مؤثر على إحداثيات كل من الجسيمين n, m . وعلاوة على ذلك يمكن افتراض وجود نظام معين من الدوال المتعامدة $u_r(x)$ بحيث إن جميع الدوال في الفراغ الثلاثي، التي تحقق الشروط الحدية يمكن فكها باستخدام

هذه الدوال المتعامدة. أي أنه يمكن كتابة الدالة $\varphi(x_1, \dots, x_N)$ بحدود حاصل ضرب هذه الدوال:

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{r_1 \dots r_N} b(r_1, \dots, r_N, t) u_{r_1}(x_1) \dots u_{r_N}(x_N). \quad (128)$$

الكميات $|b(r_1 \dots r_N, t)|^2$ يمكن النظر إليها على أنها تعين احتمال وجود الجسيم 1 في الحالة r_1 والجسيم 2 في الحالة r_2 وهكذا. إذا عوضنا في المعادلة (127) عن قيم φ بهذا التعبير ينتج بالضرب بالتعبير $u_{s_1}(x_1)u_{s_2}(x_2) \dots u_{s_N}(x_N)$ والتكامل على x_1, x_2, \dots, x_N أن نتائج المعادلة التفاضلية التالية لقيم b هي:

$$0 = \left. \begin{aligned} & \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} b(s_1, s_2 \dots s_N, t) \\ & + \sum_n \sum_{r_m} O_{s_n r_m}^n b(s_1 \dots r_m \dots s_N) \\ & + \sum_{n>m} \sum_{r^n r_m} O_{s_n s_m; r^n r_m}^{nm} b(s_1 \dots r_n \dots r_m \dots s_N) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

وتم استخدام العلاقات التعامدية للدوال $u_r(x)$ وأن المقادير:

$$O_{s_n r_n}^n = \int u_{s_n} O^n u_{r_n} dv_n,$$

$$O_{s_n s_m; r^n r_m}^{nm} = \iint u_{s_n} u_{s_m} O^{nm} u_{r_n} u_{r_m} dv_n dv_m,$$

هي عناصر في المصفوفات الممتلئة للمؤثرات المقابلة في نظام الإحداثيات المميز بالدوال $u_r(x)$. بسبب تماثل الهاميلتونيان في إحداثيات الجسيمات القيم العددية لعناصر المصفوفة تعتمد فقط على المؤشرات r و s وليس على n و m صراحة. في حالة إحصاءات بوز-أينشتين $b(s_1 \dots s_N)$ تماثلية في أعداد الكم للجسيمات، ومن ثم يمكن التعبير عنها بدوال للعدد N_r من الجسيمات في الحالة r . لأن الاحتمال المبدئي لإيجاد N_1 من الجسيمات في الحالة الأولى،

N_2 في الحالة الثانية وهكذا، يعطى من $Z^2 = N!/(N_1!N_2!\dots)$ ، فمن الأفضل تعريف المقدار:

$$b(N_1, N_2, \dots) = Zb(r_1, r_2, \dots, r_N). \quad (130)$$

المؤثرات $e^{-(2\pi i/h)\theta_r}$ من المعادلة (125) التي تغير N_r إلى $N_r + 1$ مفيدة هنا، بمساعدتهم المعادلة (129) يمكن كتابتها:

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s,r} N_s O_{sr} e^{(2\pi i/h)(\theta_s - \theta_r)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss';rr'} N_s (N_{s'} - \delta_{ss'}) O_{ss';rr'} e^{(2\pi i/h)(\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} \right. \\ \left. + \dots \right\} \frac{1}{Z} b(N_1, N_2, \dots).$$

بضرب هذه المعادلة من اليسار في Z وتبادل $1/Z$ مع يسار المعادلة (125) ينتج:

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s,r} N_s^{1/2} (N_s - \delta_{rs} + 1)^{1/2} O_{sr} e^{(2\pi i/h)(\theta_s - \theta_r)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss';rr'} N_s^{1/2} (N_{s'} - \delta_{ss'})^{1/2} (N_r + 1 - \delta_{rs} - \delta_{rs'})^{1/2} \right. \\ \left. (N_{r'} + 1 + \delta_{rr'} - \delta_{r's} - \delta_{r's'})^{1/2} \cdot e^{(2\pi i/h)(\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} \right\} \\ \cdot b(N_1, N_2, \dots). \quad (131)$$

نعود الآن إلى المسألة المقابلة المعبر عنها في النظرية الموجية الهاميلتونيان المقابل لـ (127) هو:

$$\bar{H} = \int dv_P \psi_P^* O^P \psi_P + 1/2 \iint dv_P dv_{P'} \psi_P^* \psi_{P'}^* O^{P'P} \psi_{P'} \psi_P + \dots$$

من (122) يمكن أيضًا كتابتها:

$$\hat{H} = \sum_{s,r} a_s^* a_r O_{sr} + \frac{1}{2} \sum_{ss';rr'} a_s^* a_{s'}^* a_r a_{r'} O_{ss';rr'} + \dots$$

ثم بالتعويض بمعادلات (124) في المعادلة:

$$\hat{H}S + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

نحصل على:

$$0 = \left\{ \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s,r} N_s^{1/2} O_{sr} e^{(2\pi i/h)(\theta_s - \theta_r)} N_r^{1/2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss';rr'} N_s^{1/2} e^{(2\pi i/h)\theta_{s'}} O_{ss';rr'} e^{(2\pi i/h)\theta_r} \right. \\ \left. \cdot N_r^{1/2} e^{-(2\pi i/h)\theta_{r'}} N_r^{1/2} \right. \\ \left. + \dots \right\} S(N_1, N_2, \dots).$$

تبادل المؤثرات $e^{(2\pi i/h)\theta}$ لليمين نحصل على:

$$0 = \left\{ \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + N_s^{1/2} (N_r - \delta_{sr} + 1)^{1/2} O_{sr} e^{(2\pi i/h)(\theta_s - \theta_r)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss';rr'} N_s^{1/2} (N_{s'} - \delta_{ss'})^{1/2} (N_r + 1 - \delta_{rs'} - \delta_{rs})^{1/2} \right. \\ \left. (N_{r'} + 1 + \delta_{rr'} - \delta_{r's} - \delta_{r's'})^{1/2} \right. \\ \left. \cdot e^{(2\pi i/h)(\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} \right\} S. \quad (132)$$

هذه المعادلة مطابقة للمعادلة (131) وأن التكافؤ الرياضي لصورة الجسيم والموجة تم إثباته. برهان مماثل ممكن إعطاؤه في حالة مبدأ الاستبعاد لبولي والعلاقات التبادلية (126).

على الرغم من أن النظريات الكلاسيكية لصور الجسيم والموجة تختلف تماماً، فالاثنتان فيزيائياً ورياضياً، نظريات الكم للثنتين متطابقة.

١٢- تطبيق لنظرية الإشعاع^{١١}

تجدر الإشارة إلى أن معادلات ماكسويل، التي تحكم النظرية الموجية الكلاسيكية للإشعاع، يمكن أن نحصل عليها من تباين الجهد في اللاجرانج:

$$L = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + \sum_{\alpha=1}^4 \phi_{\alpha} S_{\alpha}.$$

و S_{α} حيث $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ هي مركبات شدة التيار الأربعة، Φ_{α} الجهد الرباعي $(\Phi_4 = i\Phi_0, x_4 = ict)$ فيصبح اللاجرانج عندما يكتب صراحة بحدود في الجهود:

$$L = \frac{1}{8\pi} \left[\sum_i \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{i>k} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} S_{\alpha}. \quad (133)$$

(في هذه المعادلات والتالية المؤشرات اللاتينية من 1 إلى 3 والمؤشرات اليونانية من 1 إلى 4). العزوم المرافق للدالة Φ_i باستخدام (104) هو:

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{4\pi c} E_i. \quad (134)$$

ولأن إحصاءات بوز-أينشتين تستخدم كمات الضوء فإن علاقات التبادل المثل هي:

$$E_i(P) \Phi_{\alpha}(P') - \Phi_{\alpha}(P') E_i(P) = -2hci \delta(P - P') \delta_{i\alpha},$$

ومن التفاضل نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} E_i(P) E_k(P') - E_k(P') E_i(P) &= 0, \\ H_i(P) H_k(P') - H_k(P') H_i(P) &= 0, \\ E_i(P) H_k(P') - H_k(P') H_i(P) &= -2hci \frac{\partial \delta(P - P')}{\partial x_i}, \end{aligned} \right\} (135)$$

حيث i, j, k هي أي تبادل دوري من 1، 2، 3. تنشأ الصعوبة في ظروف أن Φ_0 لا توجد في لاجرانج هذا يؤثر فقط علاقات التبادل بين الجهود ومركبات المجال وليس علاقات التبادل (135). إذا كتب مفكوك Φ_α بواسطة مجموعة مختارة من الدوال التعامدية (مثل الموجات الثابتة في حيز مغلق) فإن محتوى طاقة اهتزاز التردد ν تصبح مضاعفًا صحيحًا من $h\nu$. وقد أظهر ديراك^{٢٢} أن هذا يجعل من الممكن اعتبار كمات الضوء في كل حالة كمتغير في النظام، وهذا يشكل صلة مع صورة الجسيم.

المراجع

تمهيد

1. W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, **43**, 172, 1927.
2. *Proceedings of the Royal Society*, A, **85**, 285, 1911; see also *Jahrbuch der Radioaktivität*, **10**, 34, 1913.
3. *Physical Review*, **30**, 705, 1927; *Proceedings of the National Academy*, **14**, 317, 1928.
4. *Proceedings of the Royal Society*, A, **117**, 600, 1928; A, **119**, 651, 1928.
5. *Annalen der Physik*, **85**, 981, 1928.
6. *Japanese Journal of Physics*, **5**, 83, 1928.
7. *Annalen der Physik*, **17**, 145, 1905.
8. *Physical Review*, **25**, 306, 1925.
9. *Verhandlungen der Deutschen Physikalische Gesellschaft*, **15**, 613, 1913.
10. *Nature*, **121**, 580, 1928; *Naturwissenschaften*, **16**, 245, 1928.

نقد المفاهيم الفيزيائية لنظرية الجسيم للمادة

1. N. Bohr, *Nature*, **121**, 580, 1928.
2. Kennard, *Zeitschrift für Physik*, **44**, 326, 1927.
3. *Loc. cit.*
4. N. Bohr, *loc. cit.*
5. N. Bohr, *loc. cit.*
6. *Ibid.*

7. Kennard, *loc. cit.*; C. G. Darwin, *Proceedings of the Royal Society*, A, **117**, 258, 1927.
8. P. Ehrenfesk, *Zeitschrift für Physik*, **45**, 455, 1927.
9. *Loc. cit.*

التفسير الإحصائي لنظرية الكم

1. H. Weyl, *Zeitschrift für Physik*, **46**, 1, 1927.
2. *Nature*, **121**, 580, 1928.
3. *Ibid.*
4. N. Bohr, *loc. cit.*

مناقشة التجارب الهامة

1. Kennard, *Zeitschrift für Physik*, **44**, 326, 1927.
2. M. Born, *Zeitschrift für Physik*, **38**, 803, 1926.
3. A. Einstien, *Berliner Berichte*, p. 334, 1926; A. Rupp, *ibid*, p. 341, 1926.
4. *Naturwissenschaften*, **11**, 873, 1923.
5. *Nature*, **121**, 501; **122**, 12, 1928.
6. *Proceedings of the Royal Society*, A, **114**, 243, 710, 1927.
7. *Ibid*, **117**, 610, 1928.
8. G. Breit, *Journal of the Optical Society of America*, **14**, 324, 1927.
9. J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, pp. 70-72, 1902.
10. *Zeitschrift für Physik*, **26**, 178, 1924.
11. P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society*, A, **117**, 610, 1928.
12. *Zeitschrift für Physik*, **53**, 157, 1929.

الملحق

1. Cf. N. Bohr, *Zeitschrift für Physik*, **13**, 117, 1923.
2. W. Heisenberg, *ibid.*, **33**, 879, 1925; M. Bohr and P. Jordan, *ibid.*, **35**, 557, 1926. Cf. also W. Heisenberg, *Mathematische Annalen*, **95**, 683, 1926.

3. P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society*, A, **109**, 642, 1925.
4. *Proceedings of the Royal Society*, A, **113**, 621, 1927.
5. *Ibid.*
6. E. Schrödinger, *Annalen der Physik*, **79**, 361, 489, 1926.
7. W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, **40**, 501, 1926.
8. P. Jordan, *Zeitschrift für Physik*, **44**, 1, 1927; P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society*, A, **113**, 621, 1927.
9. E. Wigner, *Zeitschrift für Physik*, **40**, 883, 1927.
10. S. N. Bose, *ibid.*, **26**, 178, 1924; A. Einstien, *Berliner Berichte*, p. 261, 1924.
11. W. Pauli, *Zeitschrift für Physik*, **31**, 765, 1925.
12. E. Fermi, *ibid.*, **36**, 902, 1926.
13. P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society*, A, **112**, 661, 1926.
14. *Annalen der Physik*, **79**, 361 (1926).
15. L. de Borglie, *Annales de Physique*, 10 Série, **2**, 22, 1925; *Ondes et Mouvement*, Paris, 1926.
16. D. R. Hartree, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **24**, 89, 1928.
17. P. Jordan and W. Pauli, *Zeitschrift für Physik*, **47**, 151, 1928; W. Heisenberg and W. Pauli, *ibid.*, **56**, 1, 1929; **59**, 168, 1930.
18. P. Jordan and O. Klien, *Zeitschrift für Physik*, **45**, 751, 1927.
19. *Ibid.*
20. P. Jordan and E. Wigner, *Zeitschrift für Physik*, **47**, 631, 1928.
21. W. Hiesenberg and W. Pauli, *Zeitschrift für Physik*, **56**, 1, 1929.
22. *Proceedings of the Royal Society*, A, **114**, 710, 1927.

رقم إيداع ٢٠٠٩/٤٧٨٩
ISBN 978 977 6263 26 0

تمت

12/9/2017

Telegram: @Arab_Books

لمحة عن المترجمين:

أ. د. محمد صبري أحمد عبد المطلب

حاصل على جائزة الدولة التشجيعية في الكيمياء عام ١٩٨٤ وسام العلوم والفنون من الطبقة الأولى عام ١٩٨٥، حصل على الدكتوراه في الكيمياء من جامعة فريدرش شيلر بألمانيا عام ١٩٧٣، وأشرف على عدد كبير من رسائل الماجستير والدكتوراه في مجالات كيمياء الكم والأطياف والطاقة الشمسية وغير العضوية والمواد النانومترية والكيمياء الضوئية، وهو صاحب مدرسة علمية كبيرة في هذه المجالات وله العديد من الأبحاث العلمية المنشورة في المجلات والدوريات العلمية المتخصصة.

الباحث الرئيسي لعدد من المشروعات الممولة من السوق الأوروبية المشتركة، وصندوق التعاون المصري الأمريكي، أسس مركز الطاقة الضوئية بجامعة عين شمس، ومعمل نانوتكنولوجيا الكيمياء الضوئية والشمسية بكلية العلوم.

أ. د. إنتصارات محمد حسن الشبكي

أستاذ الرياضيات البحتة المتفرغ بكلية العلوم، جامعة عين شمس ورئيس قسم الرياضيات السابق. حصلت على الدكتوراه في الرياضيات من جامعة فريدرش شيلر بألمانيا عام ١٩٧٣. أشرفت على عدد كبير من رسائل الدكتوراه والماجستير، وهي صاحبة مدرسة علمية متميزة في التحليل الدالي ونظرية المؤثرات ولها العديد من الأبحاث العلمية المنشورة في الدوريات والمجلات العلمية المتخصصة.

قامت بالتدريس في عدد من الجامعات المصرية وكذلك جامعة قطر. كما قامت بترجمات ومراجعات لعدد من كتب الرياضيات.

هذا الكتاب:

الأصداء الواسعة التي أحدثتها إسهامات فيرنر هايزنبرج الحاصل على جائزة نوبل لم تكن إلا لقلة من العلماء المعاصرين، وتعد نظرية المصفوفات التي وضعها واحدة من أساسات ميكانيكا الكم الحديثة، في حين أحدث «مبدأ عدم التيقن» الذي ابتكره انقلاباً في فلسفة العلم بأكملها. يقدم هايزنبرج في هذه التحفة الخالدة – المأخوذة من محاضرات ألقاها في جامعة شيكاغو – صورة فيزيائية كاملة لنظرية الكم، وهو لا يعرض فيها إسهاماته وحده، بل يعرض أيضاً إسهامات بور وديراك وبوز ودي بروي وفيرمي وأينشتاين وبولي وشرودينجر وسومرفيلد وروب وويلسون وجيرمر وغيرهم، وذلك بأسلوب كتب من أجل علماء الفيزياء غير المتخصصين في نظرية الكم أو الرياضيات الحديثة.

ومن بين محتويات الكتاب: المقدمات (النظرية والتجربة، المفاهيم الأساسية)، ونقد المفاهيم الفيزيائية لنظرية نيوتن الجسيمية لطبيعة الضوء (علاقات الشك وتمثيلها)، ونقد المفاهيم الفيزيائية للنظرية الموجية لطبيعة الضوء (علاقات الشك في حالة الموجات، دراسة القياس الفعلي للمجال الكهرومغناطيسي)، والتفسير الإحصائي لنظرية الكم (الاعتبارات الرياضية، تداخل الاحتمالات، ومبدأ التكاملية لبور)، وبحث التجارب الهامة (تشارلز ويلسون، حيود الضوء، تجارب أينشتاين وروب، الانبعاث، امتصاص الإشعاع وتشتته، التداخل وقوانين البقاء، أثر كومبتون، ظواهر تذبذب الإشعاع، الصياغة النسبوية لنظرية الكم)، هذا بالإضافة إلى ملحق في ثمانين صفحة حول الأساس الرياضي لنظرية الكم للمتخصصين.



١٨٤ صفحة

ISBN 978-977-6263-26-0



9 789776 263260



كلمات عربية



كلمة
KALIMA

المعارف العامة
الفلسفة وعلم النفس
الديانات
العلوم الاجتماعية
اللغات
العلوم الطبيعية والدقيقة / التطبيقية
الفنون والألعاب الرياضية
الأدب
التاريخ والجغرافيا وكتب السيرة