$\neg \cdots$

$\bot \qquad \cdots \vee \cdots$

$\cdots \wedge \cdots$

جيـــل دُويك

المنطق

$x \in E \qquad \cdots \vee \cdots$

$\forall x \in X \cdots$

$\exists x \in X \cdots$

$\forall x \cdots \qquad \cdots \Rightarrow \cdots$

ترجمة

$\exists x \cdots$ د. عز الدين الخطابي

$[\ldots x \mapsto a \ldots]$

جيـــل دُويك

المنطق

ترجمة

د. عز الدين الخطابي

مراجعة

د. فريد الزاهي

بيانات الفهرسة أثناء النشر

BC15.D69125 2018

Dowek, Gilles, 1966-

المنطق / تأليف جيل دُويك ؛ ترجمة عز الدين الخطابي ؛ مراجعة فريد الزاهي. ط. 1. أبوظبي : دائرة الثقافة والسياحة، كلمة، 2018.

136 ص. ؛ 11 × 18 سم.

ترجمة كتاب: La logique

تدمك: 978-9948-23-400-5

1- المنطق.

أ- خطابي، عز الدين. ب- زاهي، فريد. ج- العنوان.

يتضمن هذا الكتاب ترجمة الأصل الفرنسي:

Gilles Dowek

La logique

© Le Pommier, 2015

كلمة

KALIMA

www.kalima.ae

ص.ب: 94000 أبوظبي، الإمارات العربية المتحدة، Info@kalima.ae هاتف: 579 5995 2 971+

عام زايد YEAR OF ZAYED

أبوظبي Abu Dhabi Culture & Tourism للثقافة والسياحة

المنطِق

المحتويات

تمهيد

التقى غيوم دو باسكرفيل Guillaume de Baskville أثناء رحلة سفره بمجموعة من الرهبان الباحثين عن حصانٍ هرب من مكانٍ مجاورٍ. وقد اندهش هؤلاء الرهبان في البداية عندما حدَّد لهم مكان وجود الحصان، لكنهم ذهلوا تماماً عندما أخبرهم بأنه على علم أيضاً بأن الحصان هو أسرع حصان بالإسطبل، وإن لونه أسود وطوله خمسة أقدام... إلخ.

ومع ذلك، لم يسبق لغيوم أنه رأى الحصان الهارب؛ لكنه أدرك مكان توجهه عندما لاحظ آثار حوافره على الثلج. ومن خلال انتظام هذه الآثار استنتج بأن الحصان يعدو بشكل جيد.

أما لونه المحدَّد، فقد تعرّف عليه حين لاحظ بكل بساطة بعض الشعيرات السوداء العالقة بأشواك دغْل صغير.

هذه الحكاية مستمدة من رواية الكاتب الإيطالي أمبرتو إيكو Umberto Eco، الموسومة بـ «اسم *الوردة*»؛ ولكن يوجد في الأدب حكايات أخرى تشبهها. ومن القِصص

الفارسية إلى قِصص الكاتب الأمريكي إدغار ألان بو Edgar Allan Poe، شكّلت مَلَكة الاستدلال جزءاً من الصورة التي كوّنها الإنسان عن نفسه. فالإنسان حيوان يمتلك عقلاً، وهو يستدل بواسطته، كما أن المستدلّين الاستثنائيين مثل أوديب Oedipe، وأرخميدس Archimède أو شيرلوك هولمز Sherlock Homes يثيرون الإعجاب، وقد سبق أن تساءل الفلاسفة الإغريق حول طبيعة الاستدلال **raisonnement**. لهذا، تعود البحوث الأولى في المنطق إلى أرسطو.

ومن جانب آخر، استخدمت العلوم الاستدلال بكثرة، بحيث يُعد المنهج الوحيد الذي ينتهجه **الرياضيات**. غير أننا نتوصل على طرق أخرى دون الاستنباط لبلوغ الحقيقة، ومن بينها على الخصوص **الملاحظة والحساب**.

إذاً، متى سيكون الاستدلال مفيداً وضرورياً؟ وهل يختلف الاستدلال فعلاً عن الحساب، أم أنه مجرد صياغة جديدة ومقنعة للحساب؟ وهل يتوصّل إلى نفس الدقة مثل الحساب؟.

هذه بعض الأسئلة المركزية التي يثيرها المنطق؛ ونحن نجد أجوبتها ضمن نتائج شهيرة تقترن بأسماء مثل ألونزو تشورش Alonzo Church وألان تورينغ Alan Turing

وكورت غودل Kurt Gödel... إلخ. لهذا سنخصص لها القسم الأول من الكتاب. ثم نتناول في القسم الثاني؛ مكانة المنطق في معارفنا. فهل يقترن المنطق فقط بالخطاب حول الخطاب، أم أن فهم طبيعة الاستدلال يساعدنا على القيام بهذه العملية؟.

الاستدلال

قواعد من أجل الاستدلال

ليس من الضروري أن يكون الشيء حقيقياً؛ لأن هناك إنساناً مات من أجله.

أوسكار وايلد Oscar Wilde

من المحتمل أننا لن نتمكن من التواصل والتصرّف بدون ملكة الاستدلال. فكيف سنكون على علم بالمكان الذي تُباع فيه أصابع الحلوى؟ ما لم نكن قادرين على القيام بالاستدلال التالي: «إن أصابع الحلوى هي حلويات، والحلويات تباع عند الحلواني إذاً فإن أصابع الحلوى تُباع عند الحلواني».

الاستدلالات الصحيحة

بالمقابل، فإن الاستدلال التالي: «أصابع الحلوى لذيذة، والأشياء اللذيذة تباع عند صانع المثلجات، إذاً تُباع أصابع الحلوى عند صانع المثلجات»، سيكون غير صحيح.

وممّا لا شك فيه اندهاش فلاسفة اليونان من تشابه الاستدلالات الصحيحة وغير الصحيحة، لذلك عملوا على البحث عن معايير تميّز هذه عن تلك، وقد اقترح كل من أرسطو (384–322 ق.م) والرواقيين وفيلون الميغاري Philon de Mégare (القرن الرابع قبل الميلاد) قواعد تسمح ببناء الاستدلالات الصحيحة.

ومن بين القواعد المعلنة من أفكار أرسطو نذكر ما يلي: (أ) هي (ب)، و(ب) هي (ج)، إذاً (أ) هي (ج). إذا ما عوضنا (أ) و(ب) و(ج) بالعبارات التالية: «أصابع الحلوى»، «حلويات»، «تُباع عندَ الحلواني»، فسنحصل على الاستدلال السابق. وإذا ما أضفنا تعابير من مثل «محققين»، و«أذكياء»، و«غريبو الأطوار»، فسيكون استدلالنا كما يلي: «المحققون أذكياء، والأذكياء غريبو الأطوار، إذاً المحققون غريبو الأطوار». وكيفما كانت العبارات التي رمزنا إليها بـ (أ)، (ب) و(ج)، فإننا نحصل على استدلال صحيح، بمعنى أن نتيجته تكون صحيحة إذا كانت مقدماته صحيحة أيضاً. فإذا أخذنا تعابير «أصابع الحلوى»، «حلويات» و«تُباع عند صانع المثلجات»، فسيكون الاستدلال كالآتي: «أصابع الحلوى هي حلويات، الحلويات تباع لدى صانع المثلجات، إذاً تُباع

أصابع الحلوى لدى صانع المثلجات». وهذا استدلال صحيح أيضاً، لكن نتيجته خاطئة؛ لأن إحدى مقدماته خاطئة كذلك.

وأول شيء يمكن ملاحظته هو أن صحة الاستدلال مقترنة بشكله (صورته)، لهذا نقول إن المنطق صوري، وليس بدلالة الألفاظ الموجودة به. هكذا، يمكننا التأكد من صلاحية الاستدلال رغم عدم فهمنا للألفاظ. مثلاً، يكون الاستدلال التالي صحيحاً «الأشياء أغراض، والأغراض تُباع عند الحلواني، إذاً الأشياء تُباع عند الحلواني».

شيء من الغموض

ومع ذلك، فإن الاستدلال بشكل صحيح لا يكفي لتفادي الأخطاء. فالاستدلال التالي: «إن مارلين مونرو Marilyn Monroe نجمة، والنجوم تحول الهيدروجين إلى هليوم، إذاً مارلين مونرو تحول الهيدروجين إلى هيلوم»، صحيح من منظور منطقي، بيْد أن نتيجته خاطئة، رغم صحة المقدمتين. وطبعاً، الخطأ نابع من الخلط بين دلالتين للفظة «نجمة». فما دام هناك مفهومان، من الأفضل استعمال لفظتين متمايزتين، وللقيام بعملية الاستدلال، يتعيّن وبشكل مسبق، فصل المفاهيم المستعملة من شبكة الجناس والاستعارة

والمجاز والرموز والإدماج والإيحاء... إلخ. التي نستخدمها في اللغة، وهو ما يتطلب استخدام لغة شبيهة بتلك التي تصوَّرها جورج أورويل George Orwell في روايته الموسومة بـ «*1984*». ففي هذه اللغة تُعدُّ عبارة: «كل الناس متساوون» خاطئة، لأنها تعني أن كل الناس متساوون من حيث الطول والوزن والقوة... إلخ.

ولأن المنطق يقتضي فصلاً مسبقاً للمفاهيم فإنه لا يطبَّق مباشرة على استدلالات الحياة اليومية، والسؤال هو معرفة ما إذا كان بإمكاننا إزالة هذا الغموض الذي يحقق دلالة الألفاظ في اللغة، أو أن اللغة التي ستصبح دقيقة بشكل مطلق ستفقد خاصيتها التعبيرية؟.

هناك جوابان يمكن الإجابة بهما على هذا السؤال. يرى البعض، إذا كانت الألفاظ غامضة، فإن المفاهيم تتسم بالوضوح، وحتى عند استعمالنا لكلمة («نجمة» مثلاً) نفسها، فإننا نستطيع التمييز بين دلالاتها المختلفة؛ ذلك أن الاستدلال المنطقي يخص المفاهيم مباشرة، إلا أنها تنقل بطريقة ناقصة في اللغة. بالتالي، يشكل الاستدلال المذكور هيكل الاستدلال اليومي الذي يمكن، من الناحية النظرية، أن يعبَّر عنه بلغة تمَّ فصل مفاهيمها. ومن بين الأدوار التي يتعيَّن على الفلسفة القيام بها بالضبط إبداع المفاهيم، أي

فصل معنى اللفظة عن الشبكة المحيطة بها في اللغة اليومية.

أما البعض الآخر، فيعتقد بالمقابل أن مفاهيم معينة، وخصوصاً المفاهيم الأخلاقية مثل المساواة أو الحرية، هي من حيث ماهيتها مفتوحة وشمولية، وبالتالي سيكون من الوهم العمل على فصل معنى دقيق لها. وبناءً على هذه الأطروحة، فإن المنطق يطبَّق على مجال محصور في الاستدلال حيث تفصل المفاهيم، والمقصود به الاستدلال العملي. وبالفعل، فإن هذا البحث عن الدقةُ يشكِّل أساس لكل المساعي العلمية، فالحلقات المفرغة وحلقة أصدقائي لا يؤخذ بها في الهندسة التي تكون فيها الدائرة هي مجموعة من النِقاط ضمن سطح متساوِ البعد عن نقطة معينة. كما لا يؤخذ في وزن الكلمات وثقل الندم، في الفيزياء التي يكون فيها الوزن بمثابة القوة الممارسة على الشيء بفعل جاذبية الأرض.

مقومات العبارات المنطقية

مع أرسطو، تم إبراز التعارض بين الأشياء وخصائص الأشياء (أو المحمولات Prédicats). مثلاً، يشير لفظ «شيرلوك هولمز» إلى موضوع محدّد، بينما يشير لفظ «محقِّق» إلى خاصية تؤكدها موضوعات ولا تؤكدها موضوعات أخرى. فأبسط العبارات تتكون من ربط

موضوع بخاصية، بواسطة رابطة حملية أو بنفي هذه الخاصية. مثلاً نقول «إن شيرلوك هولمز محقق» أو «إن أرسين لوبين Arsène Lupin ليس محققاً».

لكن أرسطو لم يهتم كثيراً بالعبارات المتعلقة بموضوع خاص، بل اهتم أساساً بالعبارات العامة التي تربط الخصائص فيما بينها، أي تلك التي تفيد بأن كل الموضوعات التي تتحقق من خلالها الخاصية (أ)، تسمح للخاصية (ب) بالتحقق أيضاً من خلالها؛ مثلاً «كل المحققين أذكياء» وتلك التي تعلن بأن بعض الموضوعات التي تتحقق عبرها الخاصية (أ) تسمح للخاصية (ب) بالتحقق من خلالها؛ مثلاً «بعض المحققين مشهورون»، وهو ما ينطبق أيضاً على الصيغ السلبية لهذه العبارات.

وقد تم دمج الموضوعات بآلية أرسطو من طرف غيوم دوكام Guillaume D'Ockham (1285—1349)، مما سمح مثلاً بوضع الاستدلال التالي: «كل المحققين أذكياء، شيرلوك هولمز محقق، إذاً شيرلوك هولمز ذكي». وبفضل الرواقيين، ظهر كذلك مفهوم الجملة المصوغة بواسطة الروابط. مثلاً، إذا ربطنا «واو العطف» بالجملتين التاليتين: «شيرلوك هولمز محقق»، «أرسين لوبين لص»، فستصاغ الجملة كالآتي: «شيرلوك هولمز محقق وأرسين لوبين لص».

توصَّل مناطقة العصر القديم، اليوناني والروماني والعصور الوسطى، إلى مفهوم خاصية الموضوع، لكنهم لم يتوصلوا على مفهوم العلاقة بين عدة موضوعات. ففي العبارة «روميو يحب جولييت»، كانوا يدركون خاصية «حب جولييت» المطبقة على موضوع وهو «روميو» وليس على علاقة «الحب» المطبقة على موضوعين وهما «روميو» و«جولييت». لذلك، كان القدماء يعالجون عموما عبارة «يحب جولييت» دون تفكيكها، وكانوا عاجزين عن إدراج عبارات داخل استدلالهم من قبيل «كل الناس يحبّون فلاناً» أو «كل الناس يحبّون كل الناس»، وهما عبارتان لا تتسم فيهما الذات وحدها بالعمومية، بل ينطبق ذلك أيضاً على الموضوع.

كان من اللازم انتظار أعمال غوتلوب فريج Gottlob Frege (1848–1925) كي تؤخذ العلاقات بعين الاعتبار من قِبَل المناطقة. فقد أقر فريج بالعلاقات المطبقة على موضوعين أو ثلاثة موضوعات... إلخ. بحيث تصبح الخصائص علاقات متميزة مطبَّقة على موضوع واحد.

هكذا، فعندما نستدل بواسطة العلاقات، تصبح الآلية التي تسمح بصياغة عبارات عامة بالاعتماد على «كل» أو «بعض»، غير كافية، لأنها تؤدي سريعا إلى التباس المعنى.

مثلاً، عندما نقول «كل الناس يحبّون فلاناً»، فإننا قد نعني بذلك بأن ثمّة شخص يحبه الجميع (مثل مارلين مونرو) أو أن كل واحد يحب فلاناً، دون أن يحب الجميع الشخص نفسه بالضرورة. لإزالة هذا الالتباس، استعار غوتلوب فريج وشارل ساندرس بيرس Charles Sanders Peirce (1839–1914) من لغة الرياضيات إحدى آلياتها الأساسية، وهي استخدام المتغيرات. وقد أُدرجت هذه الأخيرة في لغة الرياضيات للحديث عن موضوعات غير محددة جزئياً، وقبل إدخال المتغيرات، علينا أن نسأل: «ما العدد الذي إذا ضُرب في 37، سيساوي 666؟. أو «من الشخص المحقق الذي يقطن بشارع باكر؟». لقد فكر فرانسوا فييت François Viète (1540–1603)، وهو عالم رياضي وقاضٍ، في الإشارة إلى مثل هذه الموضوعات بواسطة حروف وهي المتغيرات، مستعيراً نموذج اللغة القانونية التي تشير إلى الأفراد الذين لم يتم التعرف عليهم بعد، حيث يُقال مثلاً «سجلت الدعوى ضد (س)». ومنذ فييت أصبح من الممكن القول: «ما هو العدد (س) الذي يسمح بأن تكون س x 37 مساوية ل 666؟»، أو «ما هو الشخص (س) الذي يسمح بالقول إن (س) محقق و أن (س) يقطن بشارع بيكر؟» وهذا الحرف الذي يُستخدم في غالب الأحيان

كمتغير (x) مستمد من الحرف اليوناني (خي x) الذي يُعدُ تحويلا للكلمة العربية شيء Chay.

لقد اقترح فريج وبيرس تعويض لفظتيْ «كل» أو «بعض» بمتغيرات تحدد دلالتهما وأهدافهما فيما بعد. ولكي نقول إن الناس يحبّون مارلين مونرو، نستخدم العبارة التالية: «بالنسبة لكل (x)، يحب (x) مارلين مونرو». ولكي نقول هناك شخص يحبه كل الناس، نستعمل عبارة: «يوجد (y) بحيث إنه بالنسبة لكل (x)، (x) يحب (y)». فهذه العبارة تتميز عن «بالنسبة لكل (x)، يوجد (y)، بحيث إن (x) يحب (y)» والتي تعني أن كل واحد يحب فلاناً، دون أن يحب الجميع بالضرورة الشخص نفسه.

هكذا، تم عند نهاية القرن التاسع عشر فصل المقومات المستعملة في العبارات المنطقية وهي: الموضوعات والعلاقات التي تسمح بصياغة العبارات البسيطة، والروابط مثل «واو العطف»، «أو»، «لا»، «إذا»... إلخ. التي تسمح بتركيب هذه العبارات والمتغيرات والصيغ مثل «بالنسبة لكل (x)». و«يوجد (x)»، التي تسمح بصياغة العبارات العامة.

لغة من أجل الاستدلال

تظهر بعض المشاكل عند استعمال اللغات الطبيعية من أجل الاستدلال. أولاً، يستدعي الغموض الذي لا يحقق دلالة الألفاظ، فصل المفاهيم. ثانياً، تُعدُّ الآليات التي تستخدمها اللغات الطبيعية للتعبير عن جمل عامة مصدر الالتباسات، لذلك يفضَّل استعمال المتغيرات.

فضلا عن ذلك، فإن اللغات المذكورة مليئة بالقواعد النحوية التي تعرقل وصف الاستدلال. مثلاً، توجد في هذه اللغات مقولات نحوية عديدة متكافئة من الناحية المنطقية. ففي العبارات التالية: «شيرلوك هولمز يتأمّل»، و«شيرلوك هولمز محقق»، و« شيرلوك هولمز ذكي»، تُمنح خاصية معينة للفرد. لكن التعبير عن هذه الخاصية بواسطة الفعل «تأمل» والاسم المشترك «محقق» أو الصفة «ذكي»، ليس سوى تفصيل سطحي لا يحتوي على أي دلالة منطقية. كما أن تطابق الفعل والفاعل هو إطناب لا فائدة من ورائه منطقيا؛ فكتابة «يتأمل» بدل «تأمل» في عبارة «شيرلوك هولمز يتأمل» لا معنى لها. يمكننا أيضاً تفادي الضمائر إذا ما سمحنا لأنفسنا بالتكرار وكتابة العبارة كالآتي: «شيرلوك هولمز محقق وشيرلوك هولمز ذكي» بدل «شيرلوك هولمز محقق وهو ذكي»... إلخ.

من ثمَّ، اضطر المناطقة إلى تعديل هذه اللغات وخلق لغات مصطنعة ومختزلة بشكل كبير لتفادي نقاط الضعف المذكورة، وفي هذه اللغات الأخيرة توجد ثلاث مقولات نحوية فقط هي رموز الفرد والوظيفة والعلاقة. وللإشارة إلى موضوع ما، يمكننا استعمال رمز فرد مثل «شيرلوك هولمز»، أو «شارع بيكر» أو «باريس». يمكننا أيضاً الإشارة بشكل غير مباشر إلى موضوع كما في العبارة «عاصمة فرنسا». فهذه العبارة مركبة من لفظة «عاصمة» التي تحتاج إلى موضوع أو عدة موضوعات لوصفها «مثل فرنسا». وتدعى هذه اللفظة رمز الوظيفة. بعد ذلك، تشكل العبارات البسيطة بواسطة رمز العلاقة وموضوع أو عدة مواضيع مثل، «شيرلوك هولمز محقق» أو «شيرلوك هولمز يقطن بشارع بيكر».

تتشكل العبارات المركبة من الروابط «واو العطف»، «أو»، «لا»، «إذا»... إلخ. مثلاً «شيرلوك هولمز محقق وأرسين لوبين لص». تبقى في الأخير، الآلية التي تسمح بالتعبير بدقة عن الوقائع العامة المتعلقة بكل موضوعات الخطاب أو بموضوع غير محدد، حيث يتم لهذا الغرض استعمال متغيرات وصيغ مثل «بالنسبة لكل (x)» و«يوجد (x)»، كما رأينا. وفي الواقع، فإن فكرة الابتكار الواعي

لمثل هذه اللغات المصطنعة والدقيقة قديمة لأنها؛ تعود إلى ريمون لول Raymond Lulle (1235–1315). وقد استثمر كل من غوتفريد فيلهلم لاينتز G. W. Leibniz (1646–1716) وجورج بول George Bode (1815–1864) هذه الفكرة، لكن بدون نجاح عملي حقيقي. وكان من اللازم انتظار أعمال فريج لكي تصاغ بدقة.

وإذا كان المناطقة من رايمون لول إلى فريج حاولوا التخلص من اللغات الطبيعية، فإن التاريخ الحديث سيسجل لنا انقلاباً مثيراً؛ فمنذ نهاية ستينيات القرن العشرين، أصبحت مسألة صياغة المعنى المنطقي بواسطة اللغات الطبيعية أمراً راهناً بفضل أعمال العالم اللساني والمنطقي ريشار مونتاغ Richard Montague (1930–1971)؛ فلم تعد المسألة متعلقة بتزويد المنطق بلغات معينة، بل باستعماله كأداة من أجل فهم أفضل لآليات اللغات الطبيعية.

أجزاء في حاجة إلى تركيب

بعد تدقيق اللغة، يمكننا وصف الاستدلالات نفسها. وتتمثل المرحلة الأولى للاستدلال في استنباط عبارة من مجموعة عبارات تأكدت حقيقتها. مثلاً، باستطاعتنا استنباط العبارة (ب) من العبارتين «إذا كانت (أ)، إذاً فإن

(ب)» أو من العبارة (أ). فإذا كنا نعلم بأنه «إذا كان شيرلوك هولمز محققاً، إذاً فإن شيرلوك هولمز ذكي»، وبأن «شيرلوك هولمز محقق»، يمكننا أن نستنتج بأن «شيرلوك هولمز ذكي».

كما يمكننا استنباط العبارة (أ) من «العبارتين (أ) و(ب)». فإذا كنا نعلم بأن «شيرلوك هولمز محقق وأرسين لوبين لص»، فبإمكاننا أن نستنتج بأن «شيرلوك هولمز محقق».

والأكثر من ذلك، إن بمقدورنا استخدام عبارة عامة وتطبيقها على حالة خاصة. فمن العبارة «بالنسبة لكل (x)، تكون (أ)»، يمكن استنتاج العبارة (أ) التي يعوَّض فيها المتغير (x) بتعبير يشير إلى موضوع معين. فإذا كنا نعرف بأن كل المحققين أذكياء («بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) محققاً، فإن (x) ذكي»)، نستطيع استنتاج ما يلي: «إذا كان شيرلوك هولمز محققاً، إذاً شيرلوك هولمز ذكي».

هذه القواعد وغيرها تسمى **قواعد الاستنباط**. ويسمح اختزال اللغة بالكشف عن الصورة المنطقية للعبارات. فهناك عبارات على صورة «(أ) و(ب)» وأخرى على صورة «إذا كان (أ) إذاً فإن (ب)»، وثالثة على صورة «بالنسبة لكل (x) ستكون (أ)»... إلخ. وتشبه هذه العبارات الأجزاء التي تحتاج إلى تركيب، بحيث تشير قواعد الاستنباط إلى

كيفية جمعها، فالعنصر على صورة «إذا كان (أ) إذاً فإن (ب)» يُجمع مع عنصر على صورة «أ»، فيكوّنان معاً عنصراً آخر على صورة «(ب)»، يمكن جمعه بدوره مع عناصر أخرى... إلخ.. وباستخدامنا لقواعد الاستنباط وحدها، يمكننا إقرار حقيقة عبارات مثل: «إذا كان شيرلوك هولمز ذكيّاً، إذاً فإن شيرلوك هولمز ذكي»، لكن ليس باستطاعتنا إقرار عبارات مثل «شيرلوك هولمز ذكي». وللقيام بعملية الاستدلال، يجب بالإضافة إلى قواعد الاستنباط، وضع مسلّمات، أي وضع عبارات تكون حقائقها مقبولة دون حجة. ويسمى مجموع المسلّمات، **نظرية**.

لهذا، يُعدُ الاستدلال الذي يقر حقيقة العبارة (ع) «**برهان العبارة (ع)**»، بمثابة تسلسل للعبارات ينتهي بالعبارة (ع)، بحيث إن كل واحدة من هذه العبارات يُنظر إليها إما بوصفها مسلّمة أو بكونها مستنبَطة من العبارات السابقة بواسطة قاعدة الاستنباط.

مثلاً، لنضع ثلاثة (مسلّمات) تفيد بأن شيرلوك هولمز محقق وبأن المحققين أذكياء وبأن الأذكياء غريبو الأطوار.

- شيرلوك هولمز محقق.
- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) محققاً، إذاً فإن (x) ذكي.

- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) ذكيّاً، إذاً فإن (x) غريب الأطوار.

هكذا فإن تسلسل العبارات من قبيل:

- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) محققاً، إذاً فإن (x) ذكي.
- إذا كان شيرلوك هولمز محققاً، إذاً شيرلوك هولمز ذكي.
- شيرلوك هولمز محقق.
- شيرلوك هولمز ذكي.

يُعدُّ بمثابة استدلال صحيح يقرّر حقيقة العبارة «شيرلوك هولمز ذكي». وبالفعل، فإن العبارة الأولى هي مسلّمة وتستنبط الثانية من الأولى بتعويض المتغير (x) بكلمتي «شيرلوك هولمز». كما أن العبارة الثالثة مسلّمة وتستنبط العبارة الأخيرة من الثانية والثالثة.

ويسمح استدلال آخر (يستخدم قواعد استنباطية أكثر من تلك التي قدمناها) بالتأكيد على أن كل المحققين غريبو الأطوار.

- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) محققاً، إذاً فإن (x) ذكيّاً
- إذا كان (x) محققاً، إذاً (x) ذكي.
- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) ذكيا، إذاً (x) غريب الأطوار.

- إذا كان (x) ذكيا، إذاً فإن (x) غريب الأطوار.
- إذا كان (x) محققاً، إذاً فإن (x) غريب الأطوار.
- بالنسبة لكل (x)، إذا كان (x) محققاً، إذاً فإن (x) غريب الأطوار.

نضيف بأن كل الاستدلالات المعبَّر عنها في منطق أرسطو والرواقيين توجد في قواعد الاستنباط الحديثة.

لماذا يتعيَّن علينا تصديق المسلّمات؟

تواجهنا مع مفهوم المسلّمة مشكلة أولى. فالضرورة التي يقتضيها وضع المسلّمات للاستدلال، لا تُفسَّر بسبب تصديقنا للمسلّمات. مثلاً، لماذا نقبل تصديق كون شيرلوك هولمز محقِّقاً؟ فالشك الحقيقي يتمثل في رفض التصديق بدون استدلال، وعلى العكس من ذلك، فإن بإمكاننا عندما نتعب من البحث عن الاستدلال، وضْع ما نريد البرهنة عليه كمسلّمة، وهو ما سيحل المشكلة فوراً (أو بالأحرى سيتجنبها).

كان القدماء يبررون المسلّمات، من خلال بداهتها، فمن الممكن وضع المسلّمة التي تفيد بأن شيرلوك هولمز ذكي؛ لأنها بديهية. بالمقابل، ينبغي البرهنة على العبارة التي ليست بديهية، لكن المرء قد يتساءل عن مصدر بداهة واقع

كون شيرلوك هولمز محققاً.

يمكننا أيضاً أن نتساءل لماذا نصدق (أو نعرف) بأن كل أحجار الياقوت حمراء. فالأمر لا يعود إلى **تحقُّق شمولي**، لأنه لا أحد تحقق من كل أحجار الياقوت الموجودة بكوكبنا الأرضي.

باستطاعتنا التأكيد على أننا ما دمنا لم نلاحظ إلى حد الآن سوى الياقوت الأحمر، فنحن استخلصنا قانوناً عاماً. ومع ذلك، فنحن ندرك كوننا لم نلاحظ سوى الياقوت الأحمر ليس بالأمر العرضي؛ لأننا عندما نجد حجراً أخضر فإننا لا نسميه «ياقوتاً». بالتالي، فإن اللون يشكل جزءاً من تعريف هذه الأخيرة. إن كون كل أحجار الياقوت حمراء، ليس من البديهي ولا الواقع مستنتَجاً انطلاقاً من الملاحظة، بل يشكل جزءاً من تعريف كلمة «ياقوت». وينطبق الشيء نفسه على مسلّمات النظرية. فمسلّمة «شيرلوك هولمز محقق» أُعدتْ بديهية لكون ألفاظ «شيرلوك هولمز» و«محقق» تتوصل إلى دلالة دقيقة بالنسبة لنا.

من الممكن التعبير عن هذه الدلالة بترجمة هذه الألفاظ إلى لغة أخرى، لكن بالنسبة للغة الأولى، لا يمكن التعبير عنها إلا عبر التلفظ بالمسلّمات التي نكون مستعدين لقَبولها.

من ثَمّ، فإن هذه المسلّمات تعبر عن دلالة ألفاظ اللغة.

فإذا اقترح أحد وضع المسلّمة «شيرلوك هولمز لص»، سيعني هذا بكل بساطة أنه لا يمنح الدلالة نفسها مثلنا للألفاظ المستخدمة في هذه العبارة (ربما خطر بباله أرسين لوبين عند تلفظه باسم «شيرلوك هولمز» أو مهنة المحقق عندما وصفه بـ «لص»، أو أنه فكر في شيء آخر). كما أن قواعد الاستنباط تعبر عن دلالة «واو العطف»، «أو»، «إذا» «بالنسبة لكل (x)»... إلخ. فاستنباط العبارة «أ» من العبارة «(أ) و(ب)» يشكل جزءاً من دلالة «واو العطف».

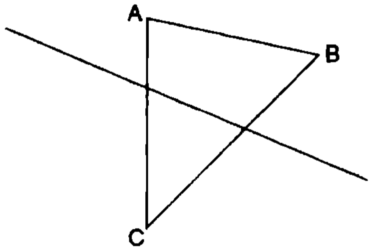
وقد فسَّر العالم الرياضي هنري بوانكاريه Henri Poincaré (1854–1912) عن هذه الفكرة بوضوح عندما قال إن (مسلّمات) نظرية ما هي «مواضعات» أو «تعريفات مقنعة». ولا يعني ذلك بالضرورة أن الألفاظ هي فقط تجميع لعلامات فارغة من المعنى، بل يعني أنَّ من اللازم التعبير عن قواعد اللعب، حتى ولو كان لدينا فقط إدراك حدسي بالموضوعات التي نتحدث عنها، ونشير بأن فريج وخصوصاً لودفينغ فتجنشتاين Ludwig Wittgenstein (1889–1951)، عمقا فكرة بوانكاريه عبر ربط دلالة اللفظ باستعماله في اللغة.

يوميات زواج معْلن

يمكن أن يفاجأ المرء بحضور بوانكاريه وسط هؤلاء الفلاسفة كلهم. ومع ذلك، فمنذ أن ظهرت الرياضيات، ألح الرياضيون على أهمية الاستدلال داخل علمهم وأعدّوه حجر زاوية منهجهم، وقد نندهش من كون إقليدس Euclide (القرن الثالث قبل الميلاد) طور الهندسة انطلاقاً من عدد صغير من المسلّمات وبرهن على الباقي بواسطة الاستدلالات، مع العلم بأنه لم يعتمد على منطق أرسطو ولا على منطق الرواقيين. والمشكلة هي أن الرياضيين في عهد إقليدس، كانوا في حاجة إلى أدوات أدق من تلك التي كان بإمكان المناطقة توفيرها لهم.

ففي غياب العلاقة، كيف يمكن التعبير عن إحدى مسلّمات الهندسة البدئية وهي: «من نقطتين لا يمر إلا مستقيمٌ واحدٌ»؟ وعلى العكس من ذلك، إذا حاول إقليدس البرهنة على كل شيء انطلاقاً من مسلّماته، فإن مجهود الصرامة المبذول من طرفه لن يكون كافياً للقول إن صورة الاستدلال بالنسبة إليه، هي التي تحدّد صحته. فقد كان هذا الرياضي يعتمد على حدسه لإدراك الموضوعات الرياضية، مثلاً عندما سلّم دون استدلال بأنه إذا قَطع مستقيم داخل مثلث (ABC) الضلع AC، عندئذ سيَقطع

المستقيمُ الضلعَ AB أو الضلع BC (الشكل 1):



وقد تعيَّن انتظار أعمال موريتز باش Moritz Pasch (1843–1930) لكي يتم الاعتراف بهذا الأمر كمسلّمة من مسلّمات الهندسة. لهذا، أعيدت صياغة الهندسة الإقليدية بدقة أكبر، في القرن التاسع عشر، على يد موريتز باش وفي ما بعد من طرف ديفيد هيلبير David Hilbert (1862–1943). وفضلاً عن ذلك، إذا كنا نتوصل على مسلّمات الهندسة منذ إقليدس، فإن اقتراحها في فروع رياضية أخرى، مثل علم الحساب، لم يتم إلا في القرن التاسع عشر، مع جيوسيبي بيانو Giuseppe Peano (1858–1932).

هناك إذاً حكايتان متوازيتان وهما: حكاية الاستدلال المنطقي الذي انطلق من الصرامة لتدقيق تعبيريته تدريجياً، وحكاية الاستدلال الرياضي الذي انطلق من التعبيرية لتحقيق الصرامة تدريجياً.

عند نهاية القرن التاسع عشر، التقى الاستدلالان أخيراً. فقد كانت نظريات هيلبير وبيانو صارمة بما فيه الكفاية، كي تسمح بالتأكيد على أن تصحيح الاستدلال يرتكز على صورته فقط، كما أن فكرة اللغة المنطقية التي طورها فريج كانت كافية للتعبير عن هذه النظريات.

بذلك وجد المنطق في الرياضيات مجالاً واسعا للتطبيق. فإذا كانت الرياضيات تقوم حصرا على الاستدلال، فإن كل ما اكتشفه المنطق حول العمليات الاستدلالية قد طُبق على الرياضيات.

بالمقابل، فإن الرياضيات أصبحت منفتحة وقابلة لكل خطاب شريطة أن يكون مؤسّساً على الاستدلال بشكل حصري. لهذا لم تعد تحدَّد بموضوعاتها (وهي الأعداد والأشكال الهندسية)، بل بمنهجها (وهو الاستدلال).

من ثمَّ، أصبحنا نتحدث عن الفيزياء الرياضية والاقتصاد الرياضي واللسانيات الرياضية... إلخ. للإشارة إلى فروع هذه العلوم التي تعالج مفاهيم معزولة وترتكز حصراً على الاستدلال. كما أن أجزاء من المنطق، الذي يعالج المفاهيم المعزولة يعتمد حصراً على الاستدلال، وأصبح يعرف انطلاقاً من أعمال بول Boole، بالمنطق الرياضي.

بذلك أضحى الاستدلال موضوع المنطق الرياضي ومنهجه في الوقت نفسه.

ملاحظات وحسابات واستدلالات

لماذا نحتاج إلى الاستدلال؟.

نحن نتوصل بوسائل أخرى لبلوغ الحقيقة، فلماذا يتعيّن علينا بناء استدلال معقّد لمعرفة أن دكان الحلوى بزاوية الشارع يبيع أصابع الحلويات، في حين يكفي النظر إلى واجهة الدكان لمعرفة ذلك؟ ثمَّ، لماذا يجب بناء استدلال لمعرفة أن 37 x 18 تساوي 666، في حين يكفي إنجاز عملية الضرب؟ وما الداعي إلى الاستدلال، بينما يبدو من الأسهل القيام بالملاحظة والحساب؟.

إن الداعي إلى ذلك بكل بساطة هو أن الملاحظة والحساب ليسا ممكنيْن دائماً للأسف.

في بلاد العجائب

تكون الملاحظة مستحيلة أحياناً لأسباب تقنية صرف؛ هكذا يمكننا ملاحظة أصبع حلوى بواجهة دكان الحلويات عندما يكون الدكان مفتوحاً، لكن ذلك يتعذّر علينا عندما يكون مغلَقاً. وفي بعض الحالات تكون الملاحظة مستحيلة في حد ذاتها. مثالاً، نحن نستخدم اللغة للحديث عن

الأشياء التي تحدث في عالمنا، وأيضاً لرواية حكايات تقع في عالمٍ متخيَّل تصاب فيها الورود بالزكام وتنمو شجرة الباوباب فوق النيازك. ففي هذا الصنف من الخطابات التي لا تكون فيها الموضوعات مادية، تصبح الملاحظة مستحيلة. لا فائدة من استعمال المنظار الفلكي لمعرفة ما إذا كانت أشجار الباوباب موجودة بكوكب الأمير الصغير؛ ذلك أن هذا الأمر ليس حدثاً واقعاً في الكون.

هكذا، نميّز في مجال العلوم بين العلوم **التجريبية** (فيزياء، بيولوجيا، أنثربولوجيا... إلخ). التي تدرس العالم المحيط بنا، والرياضيات التي تدرس الموضوعات المجردة. والرياضيات لا تتوصل على وجود مادي، مثلها مثل أشجار الباوباب بالنسبة للأمير الصغير. فالجميع رأى أربع تفاحات، لكن لا أحد رأى العدد أربعة.

حسابات واستدلالات

سيبقى لدينا الحساب، رغم تجريدية موضوع الخطاب واستحالة الملاحظة. مثلاً، ليس من الضروري القيام بالاستدلال لمعرفة أن العبارة التالية: «زوج جوكاست هو أبو أوديب»، هي عبارة صحيحة، إذ يكفي حساب «زوج جوكاست» و«أبو أوديب». فالحسابان معاً، يؤديان

إلى الاسم نفسه وهو «لايوس Laïos»، بذلك نستنتج بأن العبارة صحيحة. كما لا يُعدُ من الضروري الاستدلال للتحقق من كون العبارة التالية: «إن كلمة ici (هنا) تُقرأ طرداً وعكساً» صحيحة، إذ يكفي عكس الكلمة للتحقق من حصولنا على الشيء نفسه. وأخيراً، ليس من اللازم الاستدلال للتحقق من كون 37x18 تساوي 666، إذ يكفي إنجاز عملية الضرب كما سبق القول.

تتضمّن هذه العبارة في صياغتها ذاتها، إشارة إلى المسعى الذي ينبغي اتباعه لمعرفة ما إذا كانت صحيحة أو خاطئة. ويُدعى هذا المسعى حساباً، كما نقول عن هذه العبارات إنها قابلة للحساب، ولا ينحصر الحساب المفهوم بهذا المعنى في الأعداد، بل يمكنه أن يهم أي موضوع، سواء كان مادياً أو مجرداً. فكل النظريات تبدأ بعبارات بسيطة تتضمّن في صياغتها إشارة إلى الحساب الذي يجب إنجازه لبلوغ الحقيقة.

بيد أن الحساب يبقى محدوداً مع ذلك، فبإمكاننا التحقق من كون الحرف الأول والأخير هو نفسه في كلمة ici (هنا)، كما يمكننا التحقق من الشيء نفسه بالنسبة لكلمة Laval وبالنسبة لعبارة (إيزوب بقي هنا وهو يأخذ قسطاً من الراحة Esope reste ici et se repose)... إلخ.

وقد يتساءل المرء بدافع من الفضول، عما إذا لم يكن هناك قانون عام بهذا الخصوص، حدث بالصدفة، لأن الحرف الأول والأخير في الكلمة التي تُقرأ طرداً و عكساً يظل هو نفسه. كما يمكننا التحقق بواسطة الحساب بأن 0+0 يساوي 0، وبأن 1+0 يساوي 1، وبأن 2+0 يساوي 2، وبأن 3+0 يساوي 3... إلخ. وهنا أيضاً يبرز قانون عام وهو أن إضافة 0 إلى أي عدد لا يُغيّره.

وتبدو حدود الحساب عندما نريد وضع حقائق عامة لا تتعلق بموضوع خاص، بل بكل موضوعات الخطاب. ولكي نتحقق كُليّاً من أن إضافة 0 إلى عدد، لا يغيّره، علينا أن نتحقق من حالة 0 ومن حالة 1 و 2 و 3... إلخ. ولا تتطلب كل حالة سوى حساب بسيط، لكن بما أن هناك لا نهاية من الأعداد، فإننا سنكون مطالبين بالتحقق من حالات لا متناهية.

بصيغة أخرى، فإن هذا القانون العام لا يمكن أن يتم بواسطة الحساب. فالتحقق الشامل من العبارات العامة لا يكون ممكناً إلا عندما تتعلق هذه العبارات بعدد نهائي من الموضوعات، أي عندما يكون عالم الخطاب (وهو عالم الموضوعات الذي تتحدث عنه النظرية) متناهياً.

وعندما يكون عالم الخطاب لامتناهياً، فإننا سنواجه

إمكانيتيْن: فإما أن نقرّ حقيقة العبارة العامة بواسطة الاستدلال وإما أن نتحقَّق من عدد متناهٍ من الأمثلة، ونقر بالقانون العام. طبعاً، يمكن أن تؤدي بنا هذه الطريقة المعروفة بالاستقراء، إلى قَبول أشياء خاطئة. مثلاً، تمَّ الاعتقاد مدة طويلة بأن الشمس تشرق كل يوم في جميع جهات الكرة الأرضية، إلى أن قام بيثياس Pythéas (القرن الرابع قبل الميلاد) باجتياز المحيط القطبي واكتشف شمس منتصف الليل. فالعلوم التي تستخدم الاستقراء تضطر أحياناً إلى مراجعة النتائج المتوصَّل إليها، عندما لا تصبح متوافقة مع التجربة.

من المؤكد أن الاستقراء أو أي آلية شبيهة تسمح بالقبول بالعبارات العامة، ضروري للعلوم التجريبية التي لا يمكن أن تُقترَح في إطارها مسلّمات نهائية، لأن العالم المادي ينكشف تدريجياً أمام التجربة. لكن بدون مسلّمات لا يمكننا الإقرار بواسطة التجربة والاستدلال فقط، بأن كل الخراف لها أربع قوائم. لهذا، من اللازم استخدام الاستقراء.

بالمقابل، يمكننا اقتراح مسلّمات بخصوص الموضوعات المجرَّدة المحدَّدة نظرياً وبشكل نهائي وبالتالي إقرار صحة العبارات العامة عن طريق الاستدلال. مثلاً، باستطاعتنا

الإقرار حصراً بواسطة الاستدلال بأن x + 0 تساوي دائماً (x).

لهذا، يفضَّل عدم اعتماد الاستقراء والتركيز فقط على الاستدلال. يتم إذاً اللجوء إلى الاستدلال عندما يصبح كل من الملاحظة والحساب غير ممكنيْن. ففي حالة الخطاب المتعلق بموضوعات مجردة، نستدل لتقرير وقائع لا يمكن التوصل إليها بواسطة الحساب وهو ما يحدث أحياناً بخصوص العبارات الخاصة، وفي جميع الأحوال بخصوص العبارات العامة عندما يكون عالم الخطاب لا متناهياً. بذلك، يمكننا تعريف الرياضيات بكونها علم العوام المجردة واللامتناهية، وهو ما يبرر الاستخدام الحصري للاستدلال في الرياضيات (لأن الملاحظة مستحيلة والحساب غير كاف والاستقراء قابل لأن يُستغنى عنه).

كما أننا نلجأ في حالة الخطاب حول العام المادي إلى الاستدلال لإقرار وقائع لا يمكننا ملاحظتها، وفي هذه الحالة يُستخدم الاستدلال إلى جانب الملاحظة والاستقراء.

صحة الاستدلالات المتوصل اليها بواسطة الحساب

لإقرار صحة العبارة (ع) «كل المحقّقين غريبو الأطوار» قمنا بالبرهنة على هذه العبارة، أي لجأنا إلى تسلسل العبارات (ت) المنتهية بالعبارة (ع)، بحيث تُعد كل واحدة بمثابة مسلّمة أو تكون مستنبطة من العبارات السابقة، بواسطة قاعدة الاستنباط التي ذكرنا من قبل.

لكن هل من البديهي اعتبار التسلسل (ت) برهانا على العبارة (ع)؟ يمكننا الإقرار بأن تأكيد ذلك، يستدعي القيام ببرهنة أخرى، ثم اللجوء إلى برهان آخر لتأكيد صلاحية هذه الأخيرة وهكذا إلى ما لا نهاية. بإمكاننا في ضوء ذلك، التساؤل عما إذا كانت الاستدلالات التي ترجع صحة العبارة (ع) إلى صحة العبارة التالية وهي: أن التسلسل (ت) هو برهان على العبارة (ع))، مجرد حجج دائرية؛ إذاً لا تُعد حجة العبارة «كل المحققين غريبو الأطوار» صحيحة لأن التسلسل (ت) برهن عليها، غير مجدية، مثلما أن حجة عبارة «كل المحققين غريبو الأطوار» صادقة، لأن كل المحققين غريبو الأطوار؟.

هذا صحيح بمعنى ما، وهذا الدوران لا مناص منه؛ ولكي نحاجج على عبارة داخل اللغة، لا نجد أمامنا سوى

هذه الأخيرة. ومع ذلك هناك اختلاف كبير بين عبارة «كل المحققين غريبو الأطوار» وعبارة «التسلسل (ت) برهان على عبارة كل المحققين غريبو الأطوار»، لأن هذه الأخيرة ليست عبارة عامة ويمكن التحقق منها بواسطة الحساب. ويبيّن أبسط فحص لهذا التسلسل، بأن كل عبارة هي إما مسلّمة أو مستنبطة من عبارات سابقة، وبأن العبارة الأخيرة هي التي نريد البرهنة عليها. بهذا المقتضى، فإن إقرار صحة هذه العبارة لا يستدعي أي استدلال.

من ثمّ، فإن تقديم البرهان يسمح بإرجاع صحة عبارة غير متحقق منها مباشرة بواسطة الحساب (وهي العبارة (ع) التي نبرهن عليها) إلى صحة عبارة متحقق منها مباشرة (وهي عبارة «التسلسل (ت) برهان على (ع)»). لكن، ليس صحة العبارات التي يتم التحقق منها مباشرة هو الذي يطرح المشكلة، بل إن صحة العبارات التي لم يتم التحقُّق منها مباشرة هو الذي يطرحها. لذلك، يتعيَّن الاتفاق مسبقاً على مفهوم الصحة لتحديد مفهوم الاستدلال، بيد أن المفهوم الأول يخص فقط جزءاً صغيراً من اللغة، لا يشمل العبارات العامة، وهذا الجزء بالضبط هو الذي يطرح فيه مفهوم الصحة أقل المشكلات.

الاستدلال كونه امتداداً للحساب

يُشكّل الحساب والاستدلال طريقتين مختلفتيْن لإقرار صحة عبارة ما. وللقيام بذلك بخصوص الحساب، ينبغي تطبيق منهج نسقي؛ أما بخصوص الاستدلال فيتعيَّن استخدام المسلّمات أو قواعد الاستنباط لإنتاج العبارات، إلى أن يتم الحصول على العبارة المطلوبة.

وإذا ما اقترحنا تعويض الحساب بالاستدلال كطريقة لتحقيق صحة عبارات اللغة، فيجب البرهنة على أن الاستدلال هو امتداد للحساب، أي البرهنة أولاً على أن من الممكن بالاعتماد على الاستدلال إقرار صحة كل العبارات التي نستطيع تأكيد صحتها بواسطة الحساب، ويمكننا بعد ذلك القيام بما هو أفضل، عن طريق الاستدلال أي إقرار صحة العبارات العامة في عالم الخطاب اللامتناهي.

لنرى مثالاً كيف يسمح الاستدلال بإقامة عبارة يستدعي التحقق منها، بواسطة الحساب، كعملية جمع بسيطة، مثل 2+2=4. للقيام بذلك نبدأ بتدقيق اللغة للحديث عن الأعداد.

سنستخدم الترقيم البدئي المتمثل في تشغيل العدد n بواسطة العيدان n. يمكننا أيضاً استعمال الترقيم العشري

Décimale المألوف، لكن هذا الأمر قد يعقّد عمليتنا. لهذا، يتم اعتبار لغة تتضمّن رمزين فرديْن 0 و 1 ورمز دال وهو + ورمز العلاقة وهو =. فالعدد 3 مثلاً يُكتب 0+1+1+1. لإضافة عددين مكتوبين بعوديْن، نزيل على التوالي عيدان العدد الموجودة باليسار، ونضيف كل مرة عوداً باليمين. عندما لا يبقى أي عود باليسار، نقرأ نتيجة الحساب من اليمين. هكذا، فإن حساب 2+2 مثلاً، ينجز على الشكل التالي (الشكل 2) والنتيجة هي 4.

$$\text{II} + \text{II} \rightarrow \text{I} + \text{III} \rightarrow . + \text{IIII} \rightarrow \text{IIII}$$

للاستدلال على هذه الأعداد المكتوبة بالعيدان، نضع مسلّمتين وهما:

– بالنسبة لكل x وبالنسبة لكل y فإن:

$$(x+1) + y = x + (y + 1)$$

– بالنسبة لكل x، $x=x+0$.

للبرهنة على أن 2+2=4، نبدأ بتعويض x بـ (0+1) و y بـ (0+1+1) في المسلّمة رقم1. بذلك نحصل على العبارة

$$(0+1+1)+(0+1+1) = (0+1) + (0+1+1+1)$$ ،

أي 2+2 = 3+1.

نقر بنفس الطريقة 0+4=3+1 وأخيراً مع المسلّمة الثانية 4=0+4، ونستنتج بأن 4=2+2.

يتضح من خلال هذا المثال بأن الحساب يتحول مباشرة إلى استدلال. فالمسلّمة رقم 1 تسمح بانتقال العود من جهة إلى أخرى، أما الثانية فتمكّن من الاستنتاج عندما لا يبقى أي عود باليسار.

فضلا عن ذلك، من الواضح أن الاستدلال يسمح بإقرار صحة الوقائع العامة، ما دام باستطاعة المسلّمات كما في المثال السابق، أن تكون وقائع عامة. بالتالي، فإن بإمكاننا استنتاج وقائع عامة أخرى فيما بعد، مثلاً بتعويضنا x بـ 0 في المسلّمة رقم 1 المذكورة، نستنتج أن بالنسبة لكل y :

$$(0+1) + y = 0 + (y + 1)$$

الاستدلال وانتظام الحسابات

إذا أردنا إقرار صحة العبارة التالية: «بالنسبة لكل y، $(0+1)+y = 0+(y+1)$» بواسطة الحساب، يجب التحقق من الحالات التي تقدر فيها y بـ 0، 1، 2، 3... إلخ. وهو ما يستدعي عمليات لامتناهية من الحسابات. أكيد أن هذه الأخيرة مختلفة فيما بينها، لكنها ليست فاقدة للنظام كُليّاً. فبين الحساب الذي يسمح بإقرار الحالة التي تقدر فيها y بـ 5 والحساب الذي تقدر فيه y بـ 6، يوجد نوع من التشابه رغم كل شيء، ففي الحالتين معاً، يكفي تمرير عود من

اليسار إلى اليمين سواء كانت هناك 5 أو 6 عيدان باليمين. (الشكل 3):

$$| + ||||| \rightarrow\ . + ||||||$$
$$| + |||||| \rightarrow\ . + |||||||$$

ويُعبّر الاستدلال عن هذا الانتظام بوصفه شكلاً متولّداً عن الحساب، يمثل فيه عدد العيدان الموجودة على اليمين بشكل مبسَّط بواسطة المتغير y (الشكل 4):

$$| + \underbrace{|\ldots|}_{y} \qquad\qquad . + \underbrace{|\ldots|}_{y}|$$

وأحياناً تكون الحسابات أقل انتظاماً مما هو عليه الحال في هذا المثال، لكن انتظامها يظل كافيا، ليسمح لها بأن تدرج داخل الاستدلال. مثلاً، بخصوص العبارة «بالنسبة لكل x، x=0+x»، ينبغي نقل 5 عيدان من اليسار إلى اليمين عندما تقدَّر x بـ 5، ونقل 6 عيدان عندما تقدر x بـ 6.

ويدرك المتعودون على الاستدلال الرياضي هنا، ضرورة استخدام مسلّمة التراجع للبرهنة على هذه العبارة.

مصداقية الاستدلال

عندما نشرع في العملية، يكون الحساب أداة ذات مصداقية. أولاً، نحن نعرف كيف نتصرف للتحقق مثلاً من كون العبارة «18 x 37 =666» صحيحة؛ لأنه يكتفي بالقيام بعملية الضرب، فهذا أمر مألوف. بعد ذلك، عندما نتساءل هل 18x37 تساوي 666، ثمّة دائماً حساب يسمح بالإجابة بنعم أو بلا. فالحساب يقدم الإجابة دوماً. وأخيراً، إذا كان الحساب يشير إلى أن العبارة «18x37= 666» صحيحة، فإنه يشير أيضاً إلى أن العبارة المضادة «18x37 ≠ 666» خاطئة، لهذا، فإن الحساب لا يقدم أبداً إجابتيْن متناقضتيْن.

باختصار، يقوم الحساب على منهج نسقي، فهو يقدم دائماً جواباً محدَّدا ولا يُقدّم أبداً إجابتين متناقضتين. وينطبق الأمر نفسه على الملاحظة، على الأقل في أكثر أشكالها بساطة.

بالمقابل، لا يمثل الاستدلال هذه الخصائص بالبداهة نفسها. فعندما يسعى شيرلوك هولمز إلى حل لغز، فإننا نشك في مدى توفره على منهج نسقي ونعتقد بأنه سيكون مطالَباً بالتقدم بدون منهجية تقريباً.

ثم، ليس من البديهي توفر هذه الألغاز دوماً على حل، فمن الممكن أن توجد مشكلات يتعذَّر حلها وجرائم

محكمة الخيوط. وأخيراً، هل من الواضح أننا لا نستطيع البرهنة أثناء الاستدلال على الشيء ونقيضه، علماً بأن من يحسنون الجدل يجدون دوماً مغالطات منطقية لإقناعنا بما يريدون؟ مثل هذه الأسئلة هي التي سنحاول الإجابة عليها؛ وكما سنرى، فإن الإجابات تكون غير متوقعة.

استحالة اختزال الاستدلال في الحساب

إن المنهج الذي يتعيّن اتّباعه لإقرار صحة العبارة بواسطة الحساب، يوجد في العبارة ذاتها. بالمقابل، فإن صحة العبارة عن طريق الاستدلال لا يقدم نفسه عادة كتطبيق لمنهج نسقي. يجب إذاً إيجاد تسلسل للعبارات يؤدي إلى العبارة التي نريد البرهنة عليها. ولا يوجد هذا التسلسل في العبارة ذاتها؛ لذلك يجب بذل مجهود ابتكاري لإيجاده.

بهذا المقتضى، يكون البحث عن الاستدلال أحياناً، قريباً من البحث عن إبرة داخل كومة القش، حيث يمكن لحدس غامض أن يوجهنا إلى هذا الاتجاه أو ذاك، وتبدو مسالك واعدة كطرق مسدودة كما يمكن أن تؤدي نهاية الطريق أحياناً إلى نتائج تسمح للباحث بأن يعلن بحماس: لقد وجدتها.

الاستدلال بشكل نسقي

لحسن الحظ لا يتضمن البحث عن الاستدلال مجازفة دائمة. فبإمكاننا في بعض الحالات تطبيق طرق نسقية.

مثلاً لكي نبرهن على أن عدداً ما فردي يكفي أن نتحقق من انتهائه بأحد الأرقام التالية: 1، 3، 5، 7 أو 9. باستطاعتنا بالتالي بناء استدلالات تقر بأن العددين 13 و15 فرديان، دون أن نجهد مخيلتنا.

فعبارة «بالنسبة لكل x، $n \neq x \times 2$» (وتعني أن «العدد n فردي») عامة، لهذا لا يمكن إقرار صحتها بواسطة الحساب البسيط المتمثل في التحقق الشمولي من الحالات التي تقدر فيها x، بـ0، 1، 2، 3... إلخ. بل يمكن إقرارها بطريقة غير مباشرة تتمثل في التحقق من كون الرقم الأخير بالعدد n هو 1، 3، 5، 7 أو 9. كما يمكن للعديد من المسائل المصوغة من طرف عبارة عامة أن تُحل بواسطة منهج نسقي تم التوصل إليه فيما بعد *a posteriori*. إذاً، باستطاعتنا البحث عن منهج عام يسمح بتحديد ما إذا كانت عبارة معينة قابلة للبرهان أم لا، أي ما إذا كان هناك استدلالاً قادراً أو غير قادر على إقرار صحتها، وبهذا سنُرجع البحث عن الاستدلال إلى تطبيق منهج مألوف ونسقي شبيه بالمنهج الذي نستعمله للتحقق من عبارة مثل «العدد n فردي». وقد شكل تصور هذا المنهج أحد محاور المشروع المقترح في بداية عشرينيات القرن الماضي، من قِبل هيلبرت Hilbert.

لقد تم إدراج مفهوم الاستدلال، لأن؛ العبارات العامة

لا تقدم نفسها تلقائياً للحساب. فهناك مشروع حساب في العبارات التالية: «زوج جوكاست هو أبو أوديب»، «كلمة ici (هنا) تقرأ طرداً وعكساً» أو «18 x 37 =666»، لكنه لا يوجد في عبارة «إن أول وآخر حرف في الكلمة التي تقرأ طرداً وعكساً، متماثلان» أو في عبارة «بالنسبة لكل x، x=0+x».

ومع ذلك، فإن هذا الأمر لا ينفي قبل *a priori* وجود منهج غير مباشر، يوجد في بعض الحالات الخاصة، كما هو الشأن مثلاً في العبارات من نوع «العدد n فردي». لهذا، فإن السؤال الذي يطرحه مشروع هيلبرت هو كالآتي: هل يرجع عدم خضوع العبارات العامة للحساب إلى مجرد سبب سطحي مقترن بالصياغة أم إلى سبب عميق؟. بصيغة أخرى، هل الاختلاف بين الاستدلال والحساب هو مجرد اختلاف عرضي، أم أن الاستدلال هو فعلاً أداة أقوى من الحساب؟.

لقد كانت فكرة هيلبرت المتّسمة بالتفاؤل الذي يعكس تفاؤل عصره، تقرّ بعدم وجود اختلاف عميق بين الحساب والاستدلال. وللبرهنة على ذلك، اقترح إبراز الاختزال الثاني في الأول. وكان يأمل بالخصوص في إظهار مصداقية الاستدلال؛ لأن كما الحساب كونه يُقدم دوماً جواباً ولا

يؤدي أبداً إلى إجابتين متناقضتين.

فضلاً عن ذلك، كان لهذا المشروع دوراً في الأهمية العملية، إذ أن هذا المنهج كان سَيُخلّص الإنسانية من مهمة البحث عن الاستدلالات. من ثمّ، فإن كل الذين «عجزوا عن الجواب» أثناء البحث عن البرهان، سيتمنّون بدون شك مسألة التوصل إلى منهج نسقي.

لكن مشروع هيلبرت سيتعرض للفشل، ففي سنة 1936 بيّن كل من ألونزو تشورش Alonzo Church (مولود سنة 1903) وألان تورينغ Alan Turing (1912–1954) بأنه لا يمكن أن يوجد منهج حسابي يشير إلى أن عبارة ما، قابلة للبرهنة أم لا. وهكذا، يُعدُ الاستدلال أداة أقوى من الحساب في الواقع.

شمولية اللغة

يمكننا أن نفهم حجة تشورش وتورينغ كما يلي: اللغة أداة شمولية، وتتلخص كل مشكلة في معرفة ما إذا كانت أي عبارة صحيحة أو خاطئة. فمعرفة أن الأمير الصغير يسكن بالنيزك (ب) 612، هي معرفة أن عبارة «الأمير الصغير يسكن بالنيزك (ب) 612» صحيحة، أي معرفة البرهان الذي يستخدم معلومات الحكاية كمسلّمات.

وإذا كنا نتوصل على منهج لبناء الاستدلالات، فيكتفي تطبيقه على أي عبارة للحصول إما على استدلال من خلال إقرار الحقيقة، وإما على معرفة تفيد بأن مثل هذا الاستدلال غير موجود. سيسمح هذا المنهج بمعرفة ما إذا كان الأمير الصغير يسكن النيزك (ب) 612، لأنه يكتفي تطبيقه على العبارة: «الأمير الصغير يسكن النيزك (ب) 612»، كما سيسمح أيضاً بمعرفة ما إذا كان العدد 13 فردياً، لأنه يكتفي تطبيقه على العبارة: «العدد 13 فردياً»، سيسمح كذلك بمعرفة ما إذا كانت مبرْهنة فيثاغورس Pythagore صحيحة، لأنه يكتفي تطبيقها على ملفوظ هذه المبرهنة... إلخ.

قد يقدم هذا المنهج جواباً شاملاً عن كل الأسئلة كترياق الخيميائيين الذي كان يعالج كل العلل. هكذا، نجد أنفسنا أمام أمريْن لا ثالث لهما، إما أن هذا الترياق موجود وسيكون من الممكن حل كل المشكلات بواسطة حساب بسيط، وإما أنه غير موجود وبالتالي فإن مشروع هيلبرت لن يتحقق. وإذاً، يكتفي أن نجد مشكلة واحدة غير قابلة للحل بواسطة الحساب، لنبيّن بأن مشروع هيلبرت وهمي.

مشكلة التعطيل

قبل أن يبيّن تشورش وستيفان كلين Stephen Kleen (1909–1994) وتورينغ عدم وجود حساب يشير إلى أن عبارة ما قابلة للبرهنة أم لا، توصلا إلى أن مثل هذه المشكلة لا تعرف الحل بواسطة الحساب، وهي تسمى مشكلة **التعطيل**.

بإمكان طريقة في الحساب أن تتضمّن مراحل تتمثل في البحث عن موضوع متوفر على خاصية معينة. لذلك، قد نقوم بمحاولات متتالية على كل الموضوعات، إلى أن نجد الموضوع الملائم. مثلاً، إذا بحثنا عن العدد الصحيح nombre entier الذي يساوي ضعفه 12، فإننا سنحاول مع الأعداد 0، 1، 2... إلخ.. أن نجد العدد الذي تتحقق فيه هذه الخاصية. وبالنظر إلى حضور هذه المراحل في البحث، فإن بعض صيغ طرق الحساب لن تتطابق مع الطرق الحقيقية، لأنها لا تؤدي دائماً إلى نتيجة؛ لهذا فهي تُدعى بالطرق الجزئية. مثلاً، إذا بحثنا عن عدد صحيح ضعفه 13 وحاولنا على التوالي مع الأعداد 0، 1، 2، 3... إلخ. فإننا لن نصل أبداً إلى النتيجة وسيستمر البحث إلى ما لا نهاية.

تتمثل مشكلة التعطيل في التساؤل عما إذا كانت طريقة الحساب تؤدي إلى نتيجة أم لا. وقد بيّن تشورش وكلين

وتورينغ بأن هذه المشكلة لا يمكن أن تُحلّ بواسطة الحساب، إذ لو كانت هناك طريقة حسابية قادرة على تحليل الطرق الأخرى لتحديد ما إذا كانت تتوصل إلى نتيجة أم لا، فسيكون بمقدورنا بناء طريقة تحلل الطرق الأخرى وتقدم نتيجة فقط عندما لا تقدمها الطريقة الذي تم تحليلها.

والحال، إن مثل هذه الطريقة لا يمكنها أن توجد، لأنها لو كانت موجودة يكون تحليلها من ذاتها. وفي هذه الحالة، سيكون عليها تقديم نتيجة، إذا لم يسبق لها تقديمها، ولن يكون عليها تقديمها إذا ما سبق أن قدمتها، وهذا أمر ملتبس. ونجد في هذه الحجة صيغة أخرى لمفارقة إبيمنيدوس paradoxe d'Epiménide، هذا الفيلسوف المنتمي إلى جزيرة كريت (في القرن السادس قبل الميلاد) والذي كان يدّعي بأن كل سكان كريت كذّابون.

ولما كانت اللغة شمولية، فإنها تسمح بصياغة عبارات على شاكلة «طريقة الحساب (ح) تؤدي إلى نتيجة». ولاستخدام نتيجة تشورش، وكلين وتورينغ يجب أن يكون بالنسبة لكل طريقة حساب (ح) برهان على العبارة: «الطريقة (ح) تؤدي إلى نتيجة»؛ وعندما تؤدي هذه الطريقة إلى نتيجة يمكننا إبراز نظرية تشتمل على هذه الحالة. فإذا كانت هناك طريقة في الحساب لتحديد ما إذا كانت أي

عبارة ما قابلة أو غير قابلة للبرهان، فيكتفي تطبيقها على هذه العبارة لتحديد ما إذا كانت طريقة الحساب (ح) تقدم أو لا تقدم نتيجة. هكذا، سيتم حل مشكلة التعطيل، في تناقض مع نتيجة تشورش وكلين وتورينغ.

لا يمكن لمثل هذه الطريقة أن توجد، لأن اختزال الاستدلال في الحساب، حتى ولو كان أقل سذاجة من الفحص الشمولي لكل الحالات، يُعدُّ مستحيلاً، مثلما يُعدُّ مشروع هيلبرت وهمياً. من ثمَّ، فإن الاستدلال هو في حد ذاته أداة أقوى من الحساب.

مكتبة بابل

تبيّن النتيجة التي توصل إليها تشورش وتورينغ بأنه لا توجد طريقة لتحديد ما إذا كانت عبارة ما قابلة للبرهنة أم لا. بالمقابل، هناك طريقة جزئية، بسيطة جداً، تسمح ببناء الاستدلال عندما تكون العبارة قابلة للبرهنة، غير أن الطريقة ستتابع بحثها إلى ما لا نهاية عندما تكون العبارة غير قابلة للبرهنة.

وبالفعل، فالاستدلال: هو تسلسل للعبارات، والعبارة: هي تسلسل للكلمات والكلمات: هي نفسها تسلسل للحروف. بالتالي، فإن الاستدلال: هو مجرد توالي للحروف الطباعية

وعددها محدود (لا يتعدى 28 حرفاً وبعض علامات الوقف). وعندما نقوم بإحصاء النصوص المكوّنة من حرف مطبوع، ثم من حرفين، ومن ثلاثة حروف... إلخ. فإننا سنكون قد أحصينا النصوص الممكنة التالية: «أ»، «ب»، «ج»...، «أأ»، «أب»، «أج»... إلخ. وينتج إحصاء هذه النصوص كل ما يمكن كتابته بكل اللغات، مثل الدراسة الدقيقة للمستقبل وقصة خورخي لويس بورخيس Jorge–Luis Borges الموسومة بمكتبة بابل وكل كتاب من سلسلة «الجيب - شجرة التفاح»، يخص هذا الموضوع أو ذاك... إلخ.

لنأخذ مثالاً العبارة التالية: «شيرلوك هولمز ذكي»، فبالنسبة لكل نص من النصوص التي أحصيناها يمكن لتحقق بسيط أن يبين لنا ما إذا كنا أمام استدلال يقرّ صحة عبارتنا أم لم يقرُّها.

النص «أ» ليس استدلالاً يقر صحة عبارتنا، وينطبق الأمر نفسه على العبارة «ب»... إلخ. لكن قد يظهر يوماً ما النص التالي ضمن عملية الإحصاء:

بالنسبة لكل x، إذا كان x محققاً، إذاً x ذكيّاً

إذا كان شيرلوك هولمز محققاً، إذاً شيرلوك هولمز ذكيّ.

شيرلوك هولمز محقق.

شيرلوك هولمز ذكي.

يُعدُّ هذا النص برهاناً صحيحاً على عبارتنا ضمن النظرية المتضمّنة لمسلّمات الفصل الأول. وبشكل عام، إذا كان هناك استدلال يقرّ صحة العبارة المعنية، فإنه سيظهر في الأخير أثناء الإحصاء الشامل للنصوص وسنتعرف عليه.

من الصحيح أن البحث قد يطول ويكون مملاً، إذ يشبه حالة صنبور يسرب الماء، نضطر معها إلى استخدام كل أرقام الهاتف، حتى نجد رقم السمكري. وهذه الطريقة ليست واقعية لكنها موجودة، وذلك يكتفي لإظهار إمكانيتها بالنظرية.

من ثمّ، ستوجد لدينا نتيجة وسيطة. فمن المؤكد أن الاستدلال لا يمكن أن يُختزل في الحساب بالمعنى المألوف، أي الحساب المؤدي دوماً إلى نتيجة. بالمقابل، يمكن أن يختزل في صيغة أوسع للحساب، لا تؤدي دوماً إلى نتيجة، لكنها تسمح بمتابعة البحث إلى ما لا نهاية عندما تكون العبارة غير قابلة للبرهنة.

لهذا فإن الحساب والاستدلال يعتمدان معاً وبمعنى ما، على طريقة نسقية، لكنهما يتعارضان عندما نشرع في الحساب ونكون على يقين بإنهاء العملية ونقوم في البدء وبشكل تام بتقدير الزمن أو كمية العمل المطلوبة من جهة،

وعندما نشرع في البحث عن الاستدلال ولا نعرف هل سنتوصل يوماً ما إلى إيجاده من جهة ثانية.

نظريات نادرة مُخْتزلة في الحساب

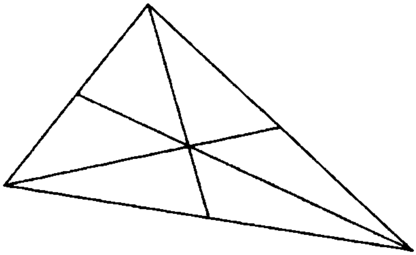
تبيِّن استحالة اختزال الاستدلال في الحساب (المؤدي دوماً إلى نتيجة)، لدى المتفائلين، بأن الاستدلال أداة أقوى بشكل أساسي من الحساب. وقد حققت الإنسانية تقدماً حقيقياً بالانتقال من هذا إلى ذاك. أما لدى المتشائمين، فإن هذا الاختزال يضع حدوداً غير قابلة للتجاوز، أمام إمكانية مقاربة المشكلات بطريقة منظمة.

والعزاء البسيط يكمن في وجود نظريات (أي مجموعة من المسلّمات) محدودة جداً، بحيث لا تسمح لنا بصياغة عبارات من قبيل «طريقة الحساب (ح) تؤدي إلى نتيجة».

فحسب هذه النظريات، يمكننا تصور طرائق في الحساب قادرة على إيجاد كل الاستدلالات والإعلان عن عدم وجود إحداها. وتندرج النظريات التي يُعدُّ عالم خطابها متناهياً ضمن هذه الحالة طبعاً، لكنها ليست بالنظريات الوحيدة. والمثال المدهش في هذا الإطار هو مثال الهندسة الأولية التي بيَّن ألفريد تارسكي Alfred Tarski (1902–1983) ومنذ سنة 1930، بأنَّ من الممكن

اختزالها في الحساب.

في البدء، استخدم تارسكي لبلوغ هذه النتيجة ملاحظة رينيه ديكارت René Descartes (1596–1650) التي يمكن لمشكلات الهندسة الأوليّة بمقتضاها أن تتحول إلى مشكلات متعلقة بالأعداد الواقعية (سواء كانت صحيحة أو غير صحيحة)، عبر إرجاعها إلى إحداثيات سينية abscisses وإحداثيات النقطة ordonnée، باختيار مَعْلم معين. بعد ذلك، بيّن تارسكي كيف يكون بإمكاننا حل مشكلات الأعداد الواقعية، باللجوء إلى حساب بسيط؟ مثلاً، كي تظهر بأن منصّفات أضلاع المثلث Médianes متقاطعة، تقوم طريقة تارسكي بحساب معادلة ثلاثة منصّفات والتحقّق بأن نظام المعادلات الثلاث بمجهولَيْن اثنين، يتوّصل دائماً على حل. (الشكل 5):



لإنجاز ذلك، نكتفي بحساب الإحداثية السينية وإحداثية النقطة بتقاطع منصّفيْن والتأكد من كون هاتين الإحداثيتين تحقّقان معادلة المنصّف الثالث.

هكذا، فإن مشكلات الهندسة التي كانت تتطلب مهارة كبيرة، أصبحت تحل الآن بتطبيق طريقة نسقية. وعلى العموم، فإن طريقة تارسكي والطرائق القريبة منها التي تطورت لاحقاً، تتطلب كمية هائلة من الحسابات. ولم تصبح هذه الطرائق مطبَّقة إلا بعد التزود بالحواسيب.

وللأسف، فإن حالة الهندسة تظل متفرّدة، فعلى سبيل المثال، لا يمكن أن نختزل في الحساب نظرية الأعداد الصحيحة المتضمّنة لرموز متعلقة بصفر وواحد وبالجمع والضرب.

ليس بنعم، وليس بلا

عندما نسعى إلى إقرار صحة العبارة «18x37=666» بواسطة الحساب، فإننا ننجز العملية ونستنتج بأن هذه العبارة صحيحة. وعندما نسعى إلى إقرار صحة العبارة «18x37=667» فإننا ننجز الحساب ونستنتج بأن العبارة خاطئة. وفي نفس الآن نقرّ بصحة العبارة «18x37≠667».

فالحساب لا يقدم أبداً الجواب التالي: «إنني لا أعرف». وقد اعتقد ديفيد هيلبرت، هذا المتفائل العنيد، بأن ذلك يصحُ على الاستدلال أيضاً، إذ أكد بأن لكل مشكلة حلّ في الرياضيات. بهذا فإن التفكير بأن لكل مشكلة حلها، معناه التفكير في أننا عندما لا نستطيع البرهنة على عبارة، يمكننا دوماً البرهنة على نفيها.

مبرِهنة غودل Gödel

معَ ذلك، لا يبدو للوهلة الأولى بأن هناك علاقة واضحة بين غياب البرهنة على عبارة معينة ووجود برهنة على نفيها. فكون الاستدلال صادراً من خارج العبارة وعدم وجود طريقة نسقية للبحث عن مثل هذا الاستدلال،

يدعوان إلى الحذر.

في هذا الإطار تبيّن **مُبرْهنة عدم الاكتمال** الشهيرة التي برهن عليه كورت غودل (1906–1978) سنة 1931، على أن لهذا الحذر ما يبرره، إذ لا يوجد دوماً استدلالٌ لإقرار بصحة العبارة أو عدم صحتها. وبالفعل، لو كان هناك دوماً استدلالٌ من هذا النوع لتمكنّا من اختزاله في الحساب، في تعارض مع نتيجة تشورش وتورينغ.

إن طريقة الحساب الافتراضي التي قد تشير إلى إمكانية إقرار عبارة بواسطة الاستدلال أو عدم إقرارها، ما زالت تركز على إحصاء النصوص. لنقترحْ عبارة مثل «شيرلوك هولمز ذكي» ولنشرع في إحصاء كل النصوص الممكنة «أ»، «ب»، «ج»... إلخ.

يبيِّن لنا التحقُّق البسيط من كل نص، ما إذا كنا أمام استدلال يقرّ بصحة العبارة أو عدم صحتها. فإذا كان هناك استدلالٌ يقرُّ بصحتها، فإنه سيظهر خلال عملية الإحصاء وسنتعرف عليه. لكن، إذا لم يوجد مثل هذا الاستدلال، فإن العملية المذكورة ستستمر إلى ما لا نهاية ولن نحصل أبداً على النتيجة. لذلك تُعد هذه الطريقة جزئية.

والآن، إذا افترضنا بأن هناك دوماً استدلالاً يقرّ بصحة العبارة أو عدم صحتها، عندما لا نتمكن من البرهنة على

عباراتنا التي يمكن بالمقابل البرْهنة على نفيها. فعند بحثنا، في الآن نفسه، عن استدلال يقرُّ بهذه العبارة أو بنفيها، نتوصّل حتماً إلى هذا الاستدلال أثناء إحصاء النصوص. ذلك أننا عندما نكون أمام عبارة قابلة للبرهنة، يظهر أمامنا الاستدلال الذي يقرُّ بهذه العبارة، وعندما تكون غير قابلة للبرهنة، يتبيَّن أمامنا استدلالٌ يقرُّ بنفيها.

وعند تصحيح الطريقة بهذا الشكل نتوصّل دوماً إلى نتيجة ونستطيع اختزال الاستدلال في الحساب، وهو ما سيتناقض مع نتيجة تشورش وتورينغ. بالتالي، توجد عبارات غير قابلة للبرهنة، كما أن نفيها غير قابل للبرهنة أيضاً.

وبإمكاننا صياغة مثل هذه العبارات، فهي تؤكد غياب البرهان الذي سيقرُّ بوجودها. وهنا نتعرّف على تنويع جديد لمفارقة إبيمنيدوس، ساكن جزيرة كريت الذي كان يدّعي بأن كل ما يقوله غير صحيح.

شجرة البلوط والقصبة

إن وجود نظريات ناقصة ليس بالأمر الغريب. فإذا أزلنا كل مسلّمات نظرية ما، فإن رموز اللغة ستفقد كل دلالتها. حينها لن نرى كيف يمكن إقرار أن شيرلوك هولمز ذكي

أو أنه غير ذكي، إذا كنا لا نعرف شيئاً عن الرجل أو عن الذكاء. كذلك، إذا أردنا معرفة قاتل، دون أن يكون لدينا أي دليل ولا أي إمكانية للبحث عن الدليل المذكور، فإننا لا نرى كيف يمكن معرفة المجرم. ومن الأمور المبتذلة الإقرار بأننا إذا نسينا المسلّمات، فإن بعض العبارات ستكون غير محدّدة داخل النظرية.

طبعاً، لا تصل مبرهنة غودل إلى حدّ هذا الابتذال. فما تشير إليه هو أن المسلّمات التي نريد وضعها كيفما كانت، فثمّة دوماً عبارة غير محدّدة (إذا كانت النظرية المعنية محدودة العبارة وبالتالي، مختزلة في الحساب). بالتالي، فإن هذه المبرهنة لا تتعلق بنظرية خاصة، بل بكل النظريات الممكنة.

هكذا، يجب ألا نأمل في استئصال كل العبارات غير المحددة، ضمن نظرية ما، بوضع مسلّمات جديدة. وبالفعل، سيكون باستطاعتنا تكرار حجة مبرهنة غودل، داخل النظرية التي تم إغناؤها، وإيجاد عبارة جديدة غير محدَّدة. النقصان هو ضعف شبيه بضعف شجرة البلوط، وليس بضعف القصبة. فالشجرة المذكورة لا تفقد هشاشتها أمام الريح عندما يتم تدعيمها، كذلك فنحن لا نتمم نظرية ما بإضافة المسلّمات.

بالمقابل، توجد نظريات - قصبات ليست تعبيرية بما

فيه الكفاية لتكون تامة. وتظل هذه النظريات مختزلة في الحساب دوماً، كما هو الشأن بالنسبة للنظريات التي يكون عالم خطابها منتهيا أو بالنسبة للهندسة الأولية.

كل ما أعرفهُ أنني لا أعرف شيئاً

يقال أحياناً عن مبرْهنة غودل بأنها تبيّن وجود عبارات لا صحيحة ولا خاطئة. وتُعَدُّ هذه الصيغة تحدّياً للحس السليم. لنأخذ كمثال عبارة «يوجد x بحيث أن $x + 1 = 0$». يمكننا إحصاء كل الأعداد والتحقق عما إذا كان أي واحد منها يؤكد الخاصية $x + 1 = 0$ أم لا.

الآن، نجد أنفسنا أمام أمريْن، فإما سنحصل على العدد الذي يؤكد الخاصية المذكورة وبذلك ستكون العبارة صحيحة، وإما أننا لن نجده وبذلك ستكون خاطئة. ولا نرى كيف يمكن تصور إمكانية ثالثة.

طبعاً، فإن مبرهنة غودل لا تتناقض مع هذه الملاحظة القائمة على الحس السليم. فعندما نجد عدداً يؤكد هذه الخاصية نستطيع بسهولة بناء استدلال يقرّ بصحة العبارة. بالمقابل، فإن عدم إيجاد مثل هذا العدد هو الذي يثير المشكلة. وفي هذه الحالة، من الذي سيضمن لنا وجود استدلال يقر بنفي هذه العبارة؟ أحياناً، وكما في حالة

العبارة «يوجد x بحيث أن $x + 1 = 0$»، تكون الحسابات التي تسمح برفض كل عدد من الأعداد، منتظمةً بشكل كاف مما لا يسمح بإرجاعها إلى حجّة وحيدة. وكما سبق الذكر، فإن هذه الأخيرة تتمثل في الاستدلال الذي يقرّ بنفي العبارة المعنية. لكن في بعض الحالات، تكون الحسابات التي تسمح برفض كل موضوع من الموضوعات مختلفة وغير منتظمة بشكل كبير، مما لا يسمح بتلخيصها بواسطة حجة عامة.

هكذا، تكون العبارة خاطئة بمعنى ما؛ لأن الساحر القادر على التحقق من الحالات اللامتناهية، سيكتشف بأنه لا توجد أي واحدة ملائمة لأن هذا التحقق اللامتناهي لا يسمح بأن يُختزل في استدلال نهائي.

عندما نقر بأن عبارة بصيغة «توجد x بحيث أن A»، بحيث تكون A خاصية قابلة للحساب، هي عبارة غير محدّدة داخل نظرية معينة، فإننا نبيّن بمعنى ما أن هذه العبارة خاطئة، ما دام الساحر القادر على التحقق من الحالات اللامتناهية لم يجد أية حالة ملائمة.

كذلك، تُعد العبارة غير المحدَّدة بصيغة «بالنسبة لكل x، توجد A» صحيحة؛ لأن الساحر القادر على فحص كل الحالات، لن يجد أي مثال مضاد. فالحجة التي تقر بلاتحدُّد

عبارة بهذه الصيغة داخل نظرية معينة، تؤكد صحتها في الواقع.

بطبيعة الحال، فإن هذه الحجة غير المباشرة ليست استدلالاً صالحاً داخل النظرية ذاتها (لأن الأمر لو كان كذلك، لنفي اللاتُحدُّد عن العبارة).

هكذا، يمكن أن تكون العبارة غير محدَّدة داخل نظرية، ومحدَّدة داخل أخرى تتضمّن صيغة استدلالية مدقّقة، تسمح بإجراء الاستدلال على الاستدلالات. فنحن نرى الأشياء أكثر عندما نغادر نظرية ما ونتأملها من الخارج. يمكننا أيضاً أن نشاهد أنفسنا ونحن نشاهد شيئاً ما... إلخ. وكما هو الشأن بخصوص الدمى الروسية المتراكبة بشكل لا متناهي، يمكننا مغادرة النظرية التي نستدل بداخلها، من أجل ملاحظتها من الخارج والإقرار بصحة العبارة الجديدة؛ وذلك لا يوجد تبرير لجميع الحجج داخل نفس النظرية.

طبيعة الحقيقة الرياضية

يقتضي تفسير غودل مناقشة طبيعة الحقيقة من جديد، في حالة الخطاب حول الموضوعات المجردة. في سنة 1911، سرقت لوحة *الجوكاندة* من متحف اللوفر، وافترض البعض بأن السارق لم يكن سوى الشاعر الفرنسي أبولينير

Apollinaire. وإذا ما حاولنا اليوم القيام بتقصٍ جديد حول هذه السرقة، فإنه من المؤكد أننا لن نجد مؤشرات تسمح باستخلاص أن أبولينير كان هو السارق أو أنه لم يكن هو السارق، وكوننا غير قادرين على معرفة الحقيقة، لا يمنع من كون أبولينير إما مذنب أو بريء. والشيء الأكيد أنه كان هو نفسه مدرِكاً لذلك.

في حالة سرقة *الجوكاندة*، يمكننا القول أن واقع كون أبولينير سرقها أو لم يسرقها، أمر مستقل عما نعرفه. فالواقع يتوفر على حقيقته الذاتية؛ لأن أبولينير و*الجوكاندة* ومتحف اللوفر موجودون في العالم المادي، باستقلال عن إدراكنا لهم. لكن، هل باستطاعتنا قول الشيء نفسه، لو كان أبولينير شخصية روائية؟.

تنتهي رواية ريمون شاندلير Raymond Chandler الموسومة بـ«*النوم الطويل*» من دون أن يعرف القارئ من الذي قتل أحد الشخوص. فضلاً عن ذلك، فإن شاندلير نفسه حكى بأنه لا يتوصّل إلى أي فكرة حول القضية. في مثل هذه الحالة، سنجازف أكثر إذا ما ادعينا بأن عبارة «قتل اللواء السائق» صحيحة في حد ذاتها ومستقلة عما يعرفه الشخوص والقارئ وشاندلير نفسه؛ لأن الوقائع المتخيَّلة لا توجد إلا من خلال ما نعرفه عنها.

هل يمكننا إذاً القول إن عبارة متضمّنة لموضوعات مجردة صادقة في حد ذاتها ومستقلة عن معرفتنا (أو عن إمكانية معرفتنا) لهذه الحقيقة؟.

تتعارض في هذا الإطار مدرستان. **فالأفلاطونيون** يرون أن عبارة «بالنسبة لكل x، x=x+0» صحيحة، سواء تمكنّا من البرهنة عليها أم لم نتمكّن. حسب الأفلاطونيين المتشدِّدين، تنبع حقيقة هذه العبارة من كون الموضوعات المجردة متوفرة على واقعها، حتى ولو كان هذا الواقع غير مادي (فالوجود في نظرهم لا يعني بالضرورة الوجود في العالم). أما من منظور الاتجاه المعتدل، فإن هذه العبارة تُعد صحيحة لأن؛ الساحر القادر على إحصاء كل الأعداد سيقرّ بأن كل عدد سيؤكد خاصية وسيستنتج إلى ما لا نهاية، بأن العبارة صحيحة. هكذا، ستبّين مبرهنة غودل بكل بساطة عجزها الجزئي عن اكتشاف هذه الحقيقة بواسطة استدلالات نهائية.

سيذهب برتراند راسل Bertrand Russel (1872–1970) أبعد من ذلك وبنوع من التحدّي، حيث سينظر إلى هذا العجز «طبّياً فقط».

لقد وضع الأفلاطونيون إذاً تقابلاً بين مفهومين وهما: الحقيقة وعدم القابلية للبرهنة، الغير متماثليْن، وفي نظرهم

فإن مبرهنة غودل بيّنت بأن هناك أشياء حقيقية لكنها غير قابلة للبرهنة.

أما المعارضون للأفلاطونية فيرفضون من جهتهم مفهوم الحقيقة الداخلية. إنهم لا يرون كيف يمكن أن توجد الموضوعات المجردة في مكان خارج العالم المادي، كما أن مفهوم التحقق اللامتناهي يقتضي افتراض وجود ساحر يتوصل على قوى خارقة، وهذه فرضية غير مرحّب بها في المجال العلمي.

ليس هناك إذاً من حلّ سوى تحديد مفهوم الحقيقة بوصفه مرادفاً لعدم القابلية للبرهنة. وفي خطاب متعلق بالموضوعات المجرّدة، سيتم خلق الحقيقة حسب هؤلاء المناهضين للأفلاطونية بدل أن تكتشف بواسطة الاستدلال.

من ثمّ، فنحن عندما نتخلى عن الفكرة الأفلاطونية حول الحقيقة، نفهم بشكل أفضل كيف أن العبارة يمكنها ألا تكون صحيحة، كما يمكنها ألا تكون خاطئة.

يقين الاستدلال

يتعارض الاستدلال والحساب إذاً في نقطتين. وعلى عكس الحساب لا يرتكز الأول على طريقة نسقية ولا يقدم الجواب دوماً. وبقي علينا أن نفحص معيار الصحة الثالث والأخير الذي أشرنا إليه من قبل، وهو الوضوح أي خاصية عدم إعطاء إجابتين متناقضتين.

يكشف عدم ارتكاز الاستدلال على طريقة نسقية وعدم تقديمه للجواب دائماً، بعض حدود المنهج الاستنباطي وإن كان لا يعلن عن فشله. على العكس من ذلك، فإن مبرْهنة غودل، بتأكيدها على أن العلم لا يتوفر على إجابات على كل الأسئلة، قد سمحت للبعض بالتكفير عن ذنوب النزعة العلمية (الاعتراف بعدم معرفة كل شيء، هو على أي حال امتياز مخصوص لأولئك الذين يعرفون أشياء كثيرة).

بالمقابل، إذا كان الاستدلال يسمح بالبرهنة على الشيء ونقيضه فسيكون الأمر بمثابة فشل حقيقي. وبالفعل، كيف سنحكم على الاستدلال إذا سمح بالبرهنة في الوقت نفسه على أن 1 مختلف عن 2 وعلى أن 1 يساوي 2؟ زيادة على

ذلك، إذا سمح الاستدلال بالبرهنة على الشيء ونقيضه، فإن **التناقض** سينتشر في اللغة برّمتها؛ لأنه سيكون من الممكن إخضاع كل العبارات للبرهان بالخلف. ويقول راسل بهذا الخصوص، إذا كان 1 يساوي 2، «فسأكون أنا هو البابا» (ما دام البابا وراسل، يشكلان اثنين). بهذا المقتضى، تُعد النظريات غير الواضحة تعريفات خاطئة لعالم خطابها؛ لأنه يستحيل داخل عالم معطى، أن تكون العبارة صحيحة وخاطئة في نفس الأوان.

وإذاً، من بين الأسئلة الثلاثة حول صحة الاستدلال، يبدو سؤال التماسك هو الأهم، لكنه أيضاً الأكثر غرابة؛ لأن البراهين تكون مقنعة على العموم. فعندما نبرهن على أن 1 يخالف 2 يجب أن نتسلح بالكثير من الشك عند التفكير في عكس ذلك، أي في إمكانية البرهنة أيضاً على أن 1 يساوي 2.

تاريخياً، لا يبدو أن المناطقة اهتموا جدّياً بسؤال تماسك الاستدلال، إلى أن فُرض عليهم بقوة عندما واجهوا التناقض. لهذا يتعيَّن لتفسير هذه المساءلة حول تماسك الاستدلال، البدء بفهم صدمة الرياضيين والمناطقة في بداية القرن العشرين عندما واجههم هذا التناقض.

أزمة نظريات المجموعات

يعود مصدر تطور الرياضيات إلى الموضوعات التي، وإن كانت مجردة، إلا أنها حافظت على شيء من الترابط مع موضوعات التجربة، ونقصد بها الأعداد الصحيحة والأشكال الهندسية. بعد ذلك، تم ابتكار موضوعات بعيدة أكثر عن التجربة وهي الأعداد الحقيقية والمجموعات والفضاءات الاتجاهية... إلخ. فعندما ندرج موضوعات جديدة، لا يكون ذلك بسبب ميلنا إلى التجديد، بل من أجل حل مشكلات متعلقة بموضوعات مألوفة لدينا. وعلى سبيل المثال، تم إدراج مفهوم الزمرة Groupe من أفكار إيفاريست غالو Evariste Galos (1811–1832) لحل مشكلات ذات صلة بالمعادلات الجبرية. لقد كان الدافع إلى وضع نظرية الزمرة هو وجود مشكلات من قبل، وأيضاً لحل مشكلات تقاربية السلاسل المتعلقة بحساب المثلثات، كما أدرج جوج كانتور Georg Cantor (1845–1918) موضوعات جديدة في الرياضيات وهي المجموعات.

ويبدو مفهوم المجموعة بسيطاً، فما إن يتضح لنا مفهوم «المحقِّق» حتى نتمكن من وضع كل المحققين في سلة واحدة، وبالتالي الإقرار بوجود مجموعة من المحققين. لكن

الجديد هنا هو أن كانتور لم يهتم فقط بخصائص عناصر المجموعات، بل أيضاً بخصائص المجموعات ذاتها. فالأمر لم يعد منحصراً في القول إن شيرلوك هولمز ينتمي إلى مجموعة المحققين بل يمكّن من القول مثلاً إن مجموعة المحققين تتوصّل إلى عناصر أقل من مجموعة اللصوص.

مع مفهوم المجموعة، تسلل اللامتناهي مرة ثانية إلى الاستدلال، ولم يعد هذا اللامتناهي مرتبطاً فقط بتعدد الموضوعات، بل إن بعضاً من هذه الأخيرة، مثل مجموعة الأعداد الصحيحة، أصبح لامتناهياً بشكل فردي. هكذا، انتقلنا من اللامتناهي بالقوة إلى اللامتناهي بالفعل.

للحديث عن هذه المجموعات، اقترح كل من كانتور وفريج نظريتيْن متشابهتيْن جداً. وتتضمّن هاتان النظريتان معاً، مسلّمة «غير مقنعة» تفيد بأننا كلما توصلنا إلى خاصية، مثل «كون المرء محقِّقاً»، فإن بإمكاننا الإقرار بالمجموعة المقابلة، أي مجموعة المحققين. لكن ما تم نسيانه في هذا المبدأ، هو تقديم توضيح مفاده أنه من اللازم أن تكون الموضوعات المعتمدة للتحقق من الخاصية المعينة، موجودة «قبل» المجموعة التي تم بناؤها. لهذا، إذا تبيَّن في نظرية كانتور وفريج بأن المجموعة المبنية تمكن من التحقق بوصفها موضوعاً، من الخاصية المؤسسة، فإنا ستصبح

عنصراً من ذات عناصرها.

صحيح أن مجموعة المحققين ليست في حد ذاتها محقّقاً معيناً، لكننا نستطيع بواسطة خاصية «المجموعة اللامتناهية» أن نشكل مجموعة المجموعات اللامتناهية. فبما أن هذا الموضوع هو بمثابة مجموعة لامتناهية، فسيكون عنصراً من عناصره الخاصة به. وقد بين سيزار بورالي فورتي Cesare Burali – Forti (1861–1931) سنة 1897 وراسل سنة 1902، بأن هذه النظرية غير واضحة. وبالفعل، فحسب مبدأ كانتور وفريج يمكننا بناء مجموعة من المجموعات غير المتضمنة في ذاتها. يمكننا بعد ذلك أن نبرهن في الوقت نفسه، بأن هذه المجموعة هي أحد عناصرها وبأنها ليست كذلك، وهنا أيضاً نجد تنوعاً آخر لمفارقة إيبمنيدوس.

طبعاً، لم يكن تناقض نظرية المجموعات لكانتور وفريج بمثابة الكارثة المتعذّر إصلاحها. فقد اقترح إرنست زيرميلو Ernst Zermelo (1871–1953) سنة 1908، ثم ألفريد نورث وايتهيد Alfred North Whitehead (1861–1947) وبرتراند راسل سنة 1910، تعديلات لهذا المبدأ الليبرالي أكثر من اللازم. ففي نظرية زيرميلو يمكننا بناء مجموعة الأعداد الزوجية وليس مجموعة المجموعات اللامتناهية أو مجموعة المجموعات غير المتضمَّنة في ذاتها.

وقد استخدمت نظرية وايتهيد وراسل مبدأً مختلفاً يتمثل في تصنيف كل الموضوعات بحسب طبيعتها مثل: الموضوعات الأساسية ومجموعات الموضوعات الأساسية ومجموعات مجموعات الموضوعات الأساسية... إلخ، وهكذا لن تتضمّن المجموعة سوى الموضوعات الأقل منها درجة في هذا السلم المترتب، ولن يصبح للسؤال حول معرفة ما إذا كانت المجموعة متضمّنة في ذاتها أي معنى. بعد بلورة هذه النظريات، انحلّت الأزمة وتمكنت الرياضيات من مواصلة تطورها. ومع ذلك بقيت هناك أسئلة حقيقية من قبيل: كيف يمكن تصور نظرية غير واضحة؟ وما الذي ينبغي فعله لتفادي تكرار هذا الأمر؟ بالخصوص: هل كانت النظريات المعدلة لزيرميلو ووايتهيد وراسل واضحة، أم سيظهر راسل جديد وسيكتشف تناقضاً جديداً؟ كان السائد في تلك الحقبة الزمنية هو عدم قَبول نظرية جديدة ما لم يتم البرهنة على وضوحها أولاً، بل إن هيلبرت ذهب بهذه الطريقة إلى أبعد الحدود حينما شك في وضوح نظرية بسيطة مثل نظرية الأعداد الصحيحة.

حذف اللامتناهي

أثار اكتشاف التناقض ضمن نظرية المجموعات لكانتور وفريج مشكلة جديدة تتعلق بمفهوم الحقيقة المنظور إليها كمرادف للقابلية للبرهنة. وكما سبق أن رأينا، فإن بإمكاننا أن نبرهن على كل شيء في هذه النظرية، مثلاً البرهنة على أن 1 يساوي 2 وعلى أن كل المحققين لصوص وأن برتراند راسل هو البابا وأشياء أخرى مجنونة تعد بالآلاف. فهل تُعد هذه الأشياء حقيقية بذريعة أنها قابلة للبرهنة؟ صحيح أن باستطاعتنا وضع المسلّمات التي نريد، ولا شيء يمنعنا من أن نأخذ بعين الاعتبار نظرية يكون فيها 1 مساوياً لـ2. لكن الحقيقة الرياضية لا ترتكز فقط على المسلّمات والاستدلالات، بل تتأسس أولاً على الحساب. فلا يمكن للعبة «1 يساوي 2»، أن تكون صحيحة بفعل الاستدلال، لأنها خاطئة بفعل الحساب أصلاً. ولما كان الاستدلال امتداداً للرياضيات، فيجب أن يتوافقا بخصوص العبارات التي تكون في مُتناولهما.

وقد بيَّنا كيف أن العبارات الصحيحة حسابياً كانت قابلة للبرهنة. لهذا، يجب علينا أن نفحص هنا أيضاً المبدأ التماثلي الذي يفيد بأن العبارات الخاطئة حسابياً، غير قابلة للبرهنة. تطرح هذه المشكلة أحياناً على التلاميذ بطريقة

ملموسة جداً. ففي أحد الأيام طلب معلم من تلاميذه إنجاز العملية الحسابية التالية: 1 +2 + 3 +...+ 100. وبينما كان التلاميذ يقومون بالعملية بجد، اقترح إحداهم بسرعة الإجابة الآتية 5050. فقد لاحظ هذا التلميذ وهو كارل فريدريك غوس Karl Friedrich Gauss (1777–1855)، أنه بجمع 1 مع 100، و2 مع 99 و 3مع 98.... و 50 مع 51، كان يحصل دائماً على 101، بالتالي كان يكتفي إضافة 101 خمسين مرة، وهو ما سيؤدي إلى نتيجة 5050. إذاً سمح الاستدلال هنا بإقرار نتيجة يمكن التوصل إليها بواسطة الحساب أيضاً. فالمهم لدى غوس الصغير هو أن تكون العبارة «1+2+3...+100= 5050» المتوصل إليها بفضل الاستدلال، قابلة للتحقق بواسطة الحساب، وإلا كانت مختلفة عن نتيجة المعلم وبالتالي خاطئة.

استوجب الأمر إذاً، عدم سماح النظرية المستخدمة للاستدلال بالبرهنة على عبارات خاطئة من جهة الحساب. ولكي لا تسمح نظرية ما بالبرهنة على صحة أي عبارة خاطئة من جهة الحساب، يجب أن تكون متماسكة. وبالفعل، إذا سمحت النظرية بإقرار صحة عبارة خاطئة من جهة الحساب «1+2+3...+100≠ 5050» في حين أنها سمحت أيضاً بإقرار عبارة «1+2+3...+100= 5050»

التي تُعد صحيحة، فستكون غير متماسكة. بالتالي، يشمل البحث عن التماسك بحثاً حقيقياً عن صحة العبارات المبرهن عليها. فإذا كانت النظرية التي تقيم البرهان بداخلها متماسكة وكانت تسمح باصطناع كل الحسابات، فإن كل العبارات الخاضعة للحساب والبرهان ستكون صحيحة من جهة الحساب. أما العبارات غير الخاضعة للحساب، فيُحكم عليها من خلال نتائجها.

وفي آخر المطاف، لا يهم كثيراً أن تكون عبارة عامة صحيحة أو خاطئة من جهة الاستدلال؛ لأن نتائجها الخاضعة للحساب وحدها هي التي تهم. مثلاً، تُعد العبارة «بالنسبة لكل x، فإن x=1+x» خاطئة؛ لأن نتيجتها 0=1+0، خاضعة للحساب. كما أن عبارة «كل الكلمات التي تُقرأ طرداً وعكساً تتضمّن الحرف «a» «خاطئة؛ لأن نتيجتها وهي «كلمة ici (هنا)» تتضمّن حرف «a» الخاضعة للحساب خاطئة أيضاً.

هل بإمكاننا الإقرار بتماسك الاستدلال بواسطة الاستدلال؟

يثير اكتشاف نظرية غير متماسكة، الشك حول مصداقية الاستدلال باعتباره كذلك. ويمكننا أن نتساءل

في هذه الحالة، إما إذا كان من المعقول إظهار صحة الاستدلال بواسطة الاستدلال. وبالفعل، فلا أحد يمكن أن يضمن لنا ذلك. مثلاً، تبرهن نظرية المجموعات لكانتور وفريج، المتَّسمة بعدم تماسكها، على تماسكها الخاص، ما دامت تبرهن على كل العبارات. لكن، لا يمكننا الثقة في نظرية تبيّن عن تماسكها، مثلما لا يمكن الثقة في شخص مجهول يؤدي القسم على أنه صادق. فإما أننا نثق في الرجل وبالتالي سيكون قَسَمَهُ له تأثير، وإما أننا لا نثق فيه وهنا لن يكون لقسمه أي تأثير. وإذا ما شككنا في صدقه، فعلينا أن نستخبر الأمر من شخص آخر.

كذلك، إذا أراد المرء أن يقتنع بتماسك النظرية (أ)، فيجب عليه البرهنة على هذا التماسك داخل نظرية أخرى (ب)، يكون مقتنعاً بتماسكها. ويبيّن مثل هذا البرهان تماسك النظرية (أ)، وإذا كانت هذه النظرية غير متماسكة، فسيكون بإمكاننا البرهنة عليها في النظرية (ب). فهذه الأخيرة ستبرهن إذاً على أن (أ) متماسكة وغير متماسكة في الوقت نفسه، وستكون هي نفسها غير متماسكة.

يتّسم برهان التماسك دوماً بنسبيّته. فنحن نبيّن بأن نظرية ما متماسكة، شريطة أن تكون النظرية، التي نقوم بصياغة برهان التماسك داخلها، متماسكة أيضاً. غير أن

مشروع إظهار التماسك المطلق للاستدلال لا معنى له، إذ لا يوجد استدلال خارج الاستدلال. والملاحظ، في سياق رياضيات بداية القرن العشرين، إن لم يكن من اللازم إظهار التماسك المطلق للاستدلال. فقد تمثلت المشكلة في تلقي موضوعات جديدة في الاستدلال (المجموعات) تتضمّن تفعيل اللامتناهي، وبالتالي في إظهار تماسك الأشكال الجديدة للاستدلال المقترنة بهذه الموضوعات، وهي نظريات زرميلو Zermelo ووايتهيد وراسل. ولإظهار تماسك هذه الأشكال الجديدة للاستدلال، لا شيء كان سيمنع من التموقع داخل نظرية أولية يبدو تماسكها مؤكداً. وللتذكير، فإننا رأينا كيف أن أحد محاور المشروع، المصوغ من قِبل هيلبرت عند بداية العشرينيات من القرن الماضي، سعى إلى اختزال الاستدلال في الحساب.

بشكل أعم، فإن المشروع لا يهدف إلى إظهار تماسك الاستدلال الرياضي العام بواسطة طرق أولية. فقد تعلق الأمر بمعنى ما ببناء طابق جديد داخل منزل الرياضيات. ولهذا السبب بالخصوص، أراد هيلبرت أن يبيّن بطرق أولية، على أن الاستدلال يُختزل في الحساب، لأنه؛ شكّل وسيلة ممكنة لإظهار تماسك الاستدلال الرياضي العام. بيْد أن النتيجة التي توصّل إليها تشورش وتورينغ، تظهر على

أن هذا الاختزال غير ممكن، وبالتالي أن فكرة البرهنة على تماسك الاستدلال الرياضي العام بواسطة هذه الطريقة لن يؤدي إلى نتيجة.

براهين مباشرة وغيرمباشرة

لقد اقتُرحتْ فكرة أخرى للبرهنة على تماسك نظرية معينة، من قِبَل غيرهارد غينتزن Gerhard Gentzen (1909–1945)؛ وتقوم هذه الفكرة على التعارض بين صنفين من البراهين هما: صنف **البراهين المباشرة** وصنف البراهين غير المباشرة. ويُعد البرهان غير مباشر عندما يقوم بحل مشكلة في حالة عامة بغرض تطبيقه لاحقاً، في حالة خاصة.

مثلاً، تُعد البرهنة على عبارة «1 + 2 + 3 +..+100 = 5050» المتمثلة في إجراء عمليات الجمع، برهنة مباشرة. بينما تُعد برهنة غوس الصغير غير مباشرة، ما دامت الصياغة التامة لحجته تقتضي البرهنة على أنه بالنسبة لكل عدد n، تُعد 1+2+3+.....+ n x 2 تساوي (n x (2 x n +1، ثم تطبيق هذه النتيجة في الحالة التي تكون فيها n مساوية لـ50.

وقد بيَّن غينتزن بأن البرهنة المباشرة على عبارة قابلة للحساب، هي اصطناع للحساب. بالتالي، لا توجد برهنة مباشرة على عبارات قابلة للحساب وخاطئة مثل 2 = 1 أو

$1 + 2 + 3 \ldots +100 \neq 5050$.

بعد ذلك، بيّن كيف أن بإمكان كل برهنة غير مباشرة أن تتحول إلى برهنة مباشرة. وقدم طريقة حسابية للحصول على هذه البرهنة الأخيرة انطلاقاً من البرهنة غير المباشرة. وتمثلت هذه البرهنة في الحذف التدريجي للتحولات داخل الاستدلالات، أي في تعويض برهنة عامة مستعمَلة في حالة خاصة، ببرهنة على حالة خاصة. مثلاً، في حالة شك غوس الصغير في نتيجته، بعد قيامه ببرهنته غير المباشرة، سيكون بإمكانه تطبيق طريقة غينتزن للحصول على البرهنة المباشرة (أي على الحساب المطلوب من المعلم). بذلك سيطمئن لكون العبارة التي برهن عليها صحيحة من جهة الحساب. بيْد أن المشكلة هي أننا لكي نبرهن على أن طريقة غينتزن تؤدي دائماً إلى نتيجة (أي أنها لا تؤدي إلى حسابات لا متناهية) يجب دائماً التموقع داخل نظرية أعم من تلك التي نبرهن على تماسكها. لهذا، فإن براهين غينتزن حول التماسك لا تستجيب لمشروع هيلبرت، لأننا لكي نبرهن على تماسك نظرية المجموعات علينا التموقع داخل نظرية أعم، أي أقل وثوقاً من النظرية التي نريد تأكيد صحتها.

مبرِهنة النقصان الثانية لغودل

لقد بيّن كورت غودل، بواسطة مبرهنة النقصان الثانية، بأن هذا الفشل لا يعود إلى عيب في طريقة غينتزن، بل إلى كونه حتمياً. وبالفعل، فقد أظهرت هذه المبرْهنة بأن لا يمكن لأي نظرية متماسكة أن تُظهر تماسك نظرية أعم منها. بالتالي، فإن مشروع هيلبرت القاضي بإظهار تماسك الاستدلال الرياضي العام، اعتماداً على طرق أولية، لا يمكن أن يؤدي إلى نتيجة. وكانت مبرهنة النقصان الأولى لغودل، قد أبانت عن وجود عبارات غير محددة في كل النظريات. أما المبرهنة الثانية، فبيّنت بمعنى ما، على أن داخل النظرية (ط)، تُعد العبارة «إن النظرية (ط) متماسكة» دوماً من بين العبارات غير المحدّدة. لهذا، لا يمكن لأي نظرية متماسكة أن تُظهر تماسكها الخاص، *وبالأحرى* أن تبرز تماسك نظرية أعمَّ منها. من ثمّ، ليس باستطاعتنا إظهار تماسك نظريات زيرميلو أو وايتهيد وراسل سواء قمنا باختزال الاستدلال في الحساب، بطريقة أولية أو عبر الإبانة، وبطريقة أولية أيضاً، على أن بإمكان البراهين غير المباشرة أن تتحول إلى براهين مباشرة، أو باعتماد أي طريقة أولية كيفما كان نوعها. لذلك، من المحتمل أن تكون نظريات زيرميلو أو وايتهيد وراسل متماسكة؛ لأن لا أحد إلى حد الآن كشف

عن تناقضها. لكن إذا كانت متماسكة، فلا يمكن بالمقابل البرهنة على ذلك، اللهم إذا ما استدعينا نظرية أعمّ؛ لكن مثل هذه البرهنة لن تكون مفيدة، لأنها ستستعمل مبادئ أقل ثقةً من المبادئ التي تريد تأكيد صحتها.

الحساب والاستدلال

في آخر المطاف، يتعارض الحساب والاستدلال عملياً بالنظر إلى كل معايير الدّقة. فالحساب يرتكز على طريقة نسقية ويقدم دوماً الإجابة ولا تنتج عنه إجابتان متناقضتان. بالمقابل، وكما بينت مبرهنة تشورش وتورينغ، فإن البحث عن الاستدلال لا يعود إلى تطبيق طريقة نسقية، بل فقط إلى تطبيق طريقة جزئية تتابع بحثها إلى ما لا نهاية، عندما تكون العبارة غير قابلة للبرهنة.

إن الاستدلال، وفق ما بينته مبرْهنة النقصان الأولى لغودل، لا يقدم دوماً الجواب. وأخيراً، يُعد التعارض بخصوص النقطة الثالثة أدق، فمبرْهنة النقصان الثانية لغودل لا تبيّن (لحسن الحظ) بأن الاستدلال غير متماسك، بل بأنه إذا كان متماسكاً، فإن هذا التماسك لا يمكن أن تقوم له قائمة بدون استدعاء مبادئ أعم، أي أقل ثقةً من المبادئ التي نريد تأكيد تماسكها.

قد أُصْبنا من كل هذه النتائج السلبية بالإحباط؛ وفعلاً فإن اكتشافها أُعدَّ محبطاً بشكل كبير منذ بداية هذا القرن، وهي المدة التي لم يعد فيها مكان داخل الأوساط العلمية للشك ولا للتواضع. فأولئك الذين توقعوا نهاية تاريخ الاستدلال، وهي المدة التي ستحل فيها كل المشكلات، سيضطرون إلى الإقرار، بعْد تشورش وتورينغ، بأن الأمر يتعلق بوهم وبأن هناك آفاق مفتوحة أمام التقدم. أما أولئك الذين اعتقدوا بأن لا وجود لمشكلات غير قابلة للحل، فسيضطرون إلى الإقرار، بعد المبرهنة الأولى لغودل، بوجود أسئلة غير محسوم فيها من طرف المسلّمات، في كل النظريات.

وأخيراً، فإن أولئك الذين اعتقدوا بأن الصرامة الصورية للاستدلال هي ضمانة لصحته، سيضطرون إلى الاعتراف بعد المبرهنة الثانية لغودل، حتى لو أكدنا بأن كل عبارة استدلالية ناجمة عن عبارات سابقة، بفعل قواعد دقيقة، فلا شيء يضمن لنا بأن هذه القواعد تشكل نظرية متماسكة وبأن العبارات المبرهن عليها صادقة بالتالي. لهذا، علينا الإقرار بأن الاستدلال كان مع ذلك أداة فعالة جداً لكنه يظل محدوداً.

ما الشيء المقسَّم بشكل أفضل؟.

لقد تبيّن فيما بعد بأن الاستدلال الذي أدرج بوصفه امتداداً للحساب، هو من طبيعة مغايرة جداً، إذ أنه لا يرتكز على طريقة نسقية ولا يقدم دائماً الجواب كما لا يمكن البرهنة على تماسكه.

فهل يساعدنا فهم طبيعة الاستدلال على الاستدلال؟.

إن الحس السليم هو أفضل قسمة في العالم.

رينيه ديكارت

يبدو لأول وهلة أن المنطق يحتل مكانة خاصة جداً في معارفنا. وإذا كان الحساب يدرس الأعداد وكانت الهندسة تدرس الأشكال داخل المستوى والمكان... إلخ. فإن المنطق يدرس الاستدلال، أي طريقة الحساب والهندسة. بالتالي، فإن هدف المناطقة ليس هو حل المشكلات، بل بالأحرى تفسير الطريقة التي تحل المعارف الأخرى بواسطتها هذه المشكلات. هكذا، يبدو المنطق خطاباً من الدرجة الثانية، أو خطاباً عن الخطاب.

فما الفائدة من فهم الاستدلال بهذا الشكل؟ وهل تُعد دراسة الاستدلال غاية في ذاتها، يبررها فقط فضول معرفي، أم أنها مفيدة بل وضرورية من أجل الاستدلال؟ نشير في البداية إلى أن هذا السؤال لا يفترض لأي حُكم قيمة. فإذا

كان المنطق غاية في ذاته، فإن ذلك لن يفقده قيمته، بل العكس هو الصحيح؛ وإذا صدقنا البعض، ففي الفضول المجاني وحده يكمن «شرف العقل الإنساني». ويهمنا هنا تفسير لماذا تظل الدراجة الهوائية متوازنة، بالرغم من كون ذلك لا يساعد فعلاً على ركوبها.

هناك حجة تقليدية تدعم غياب تأثير النظرية حول الاستدلال في الاستدلال نفسه، مفادها أن جميع الناس، على ما يبدو، يعرفون الاستدلال كما ينبغي «بشكل طبيعي». وعلى ما يبدو فإن الحس السليم هو أفضل قسمة في العالم. لذلك، سيقترن المنطق بالإبستيمولوجيا وبالخطاب حول الخطاب، أما الحس السليم الذي يكتفي للاستدلال، فلن يكون له أي تأثير على الاستدلال نفسه.

هناك إذاً إمكانيتان: فإما أن الاستدلال يُعدُ واضحاً وطبيعياً، وفي هذه الحالة ستكون دراسته بمثابة السعيّ المجاني الخالص، والتي لا تساعد على الاستدلال بل قد لا تتم أصلاً، وإما أن الاستدلال ليس طبيعياً، كما قد يبدو للوهلة الأولى.

لفهم هذا الأمر، سنعتمد على بعض الأمثلة المتعلقة بمشكلات ساعدت نظرية الاستدلال على حلها. وسنبدأ بالمشكلات التي تتطلب حلاً من الدرجة الثانية، بفعل

طبيعتها ذاتها. سنرى بعد ذلك، كيف تتطلب بعض المشكلات العادية حلاً من الدرجة الثانية؟.

أخيراً، سنشير إلى بعض المجادلات الشهيرة حول صحة بعض الاستدلالات، وسنرى كيف يمكن للمنطق أن يساعد أحياناً في تقدم النقاش.

المزيد من الأسئلة

المعادلات الجبرية

إن أول مثال ستتم مناقشته هو مثال المعادلات الجبرية. ففي سنة 1832، بيَّن إيفاريست غالوا بأن المعادلات من درجة تفوق الخمس درجات، لا يمكن أن تُحلَّ بواسطة علامات الجذر؛ أي أنه لا توجد طريقة عامة لبناء حلول لهذه المعادلات؛ لأن هذه الحلول غير معبّر عنها في اللغة المتضمّنة للعمليات المألوفة وهي الجمع والضرب وحاصل القسمة والجذر... إلخ. وتمثلت أبسط مشكلة في إيجاد طريقة تشير فقط إلى قابلية أو عدم قابلية المعادلة للحل، ولو أدى ذلك إلى البحث عن أرقام تقريبية لهذا الحل. لقد وضع ألفريد تارسكي هذه الطريقة سنة 1930، وهي تقوم على كون الأعداد الحقيقية (سواء كانت صحيحة أو لم تكن)، المتضمنة لرموز العدد 0 والعدد 1 والجمع والضرب وعلامة الترتيب والمساواة، مختزلة في الحساب. وهناك بالخصوص، طريقة حسابية تشير إلى أن عبارة مصوغة بالشكل الخاص التالي: «توجد y ،x... بحيث أن a=b»، يمكن أن تكون

قابلة أو غير قابلة للبرهنة، أي أن المعادلة a=b يمكن أن تتوصل إلى حل أو لا تتوصل إليه.

بالمقابل، أثار هيلبرت سنة 1900، مشكلة إيجاد طريقة مماثلة تخص المعادلات الجبرية في مجال الأعداد الصحيحة. وفي سنة 1970 بيّن يوري ماتيا سفيتش Youri Matiya Sevich (المولود سنة 1947) بأن ذلك غير ممكن. فلقد قام بتعميم نتيجة تشورش وتورينغ لهذا الغرض، مبيّنا بأنه لا توجد طريقة حسابية تشير إلى إمكانية وجود عبارة مصوغة كالآتي: «توجد y ،x... بحيث أن a=b» يمكن أن تكون قابلة أو غير قابلة للبرهنة، أي أن المعادلة a=b يمكن أن تتوصل إلى حل أو لا تتوصل إليه.

يمكن تفسير نجاح المنطق، باعتباره نظرية من المستوى الثاني، في معالجة مشكلات وجود طريقة لحل المعادلات بكون هذه المشكلات هي نفسها من مستوى ثانٍ. فالأمر لا يتعلق بحل معادلة خاصة، بل بتصور طريقة لحل كل المعادلات المصوغة بشكل معين أو بإظهار أن هذه الطريقة غير موجودة. لذلك، كانت هناك دوماً مشكلات من المستوى الثاني في الرياضيات؛ لأن العلماء الرياضيين لم يكتفوا بإنجاز الحسابات وحل المعادلات والبرهنة على المبرْهنات، بل تصوروا أيضاً طرقا للقيام بذلك بشكل آلي أو بيّنوا بأن مثل هذه الطرق غير موجودة.

الحواسيب

هناك مثال آخر متعلق بالمستوى الثاني وساهم المنطق في تقدّمه وهو تصوّر آلات الحساب. وهذه المشكلة قديمة نسبياً، ما دامت الأدوات الميكانيكية الأولى، ودون ذكر العدّاد، تعود إلى ويلهلم شيكار Wilhelm schickard (1592—1635) وبليز باسكال Blaise Pascal (1623—1662) وغوتفريد ويلهلم لايبنتز وشارل باباج Charles Babbage (1792—1871).

فقد كانت آلات شيكار وباسكال تنجز عمليات الجمع، وآلة لايبنتز تنجز عمليات الضرب، أما آلة باباج فكانت تسمح بإجراء حسابات أخرى. لكن، لم تكن أي واحدة منها آلة شاملة، أي قادرة على إنجاز أي حساب ممكن. ولم تبتكر مثل هذه الآلات وهي الحواسيب إلا في القرن العشرين.

هكذا، فإن النماذج المجردة للحساب التي طورها المناطقة في الثلاثينيات من القرن الماضي، لتوضيح مسألة هيلبرت المتعلقة بقابلية اختزال الاستدلال في الحساب والإجابة عليها في الأخير بالنفي، مكّنت من فصل العمليات الأساسية التي يتعيّن أن تتوصل إليها هذه الآلة لتكون شاملة.

وقد ألهمت هذه الأعمال ابتكار الحواسيب الأولى التي أنجزت بالضبط من طرف عالمين في المنطق وهما: جون فون نيومان John von Neumann (1903—1957) وألان تورينغ. وما زالت هذه النماذج تستخدم إلى حد اليوم لإظهار كيف أن بعض المشكلات التي يطرحها المتخصصون في المعلومات، لا تختزل في الحساب (مثلاً، مشكلة معرفة ما إذا كان برنامجان يقومان بالشيء نفسه)، كما أنها ألهمت واضعي مبادئ لغات البرمجة (Lisp،ML، Prolog).

آلات الحساب وآلة الاستدلال

من بين نماذج الحساب هذه، نجد الاستدلال. وكما رأينا، فمن الممكن دائماً التعبير عن الحساب بواسطة الاستدلال. فإضافة 2 إلى 2 للحصول على 4، هي البرهنة على عبارة «2 + 2 = 4». والتحقق من كون زوج جوكاست هو أبو أوديب، معناه البرهنة على عبارة «زوج جوكاست هو أبو أوديب». كما أن حساب العدد السابق على 12 للحصول على 11 يعني البرهنة على عبارة «11 سابقة على 12».

إن حساب العدد السابق على العدد x يعني، بشكل أعمّ، إيجاد العدد y والبرهنة على العبارة «y سابق على x» أو إيجاد برهان بنائي لعبارة «يوجد y بحيث أن y سابق

على x»، أي برهان وجود ناجم عن إعطاء مثال. إضافة إلى ذلك، فإن البحث عن مثل هذا الاستدلال يمكن أن يُنجز بواسطة الحاسوب، ما دامت هناك كما سبق الذكر، طرائق جزئية للحساب تبني الاستدلال من أجل عبارات قابلة للبرهنة. طبعاً، فإن الحاسوب سيتابع بحثه إلى ما لا نهاية عندما تكون العبارة غير قابلة للبرهنة.

وبدل تصور الحواسيب كآلات لإنجاز الحسابات، يمكننا تصورها كآلات للبحث عن الاستدلالات، ويستخدم هذا المبدأ كأساس للغات التصريحية للبرمجة، مثل لغة برولوغ Prolog. ففي لغة برولوغ، تتمثل برمجة حساب العدد السابق على عدد معين في تقديم التعريف التالي: «يكون y سابق على x إذا كانت x = y+1». فلحساب العدد السابق على 12، نطلب من الحاسوب أن يبحث عن برهان بنائي لعبارة «يوجد y بحيث إن y سابق على 12».

وانطلاقاً من هذه البرهنة نستخلص بعد ذلك النتيجة 11. بالتالي، فإن البرمجة داخل هذه اللغة، تتمثل في تحديد ما الذي يجب حسابه بواسطة عبارة ما، كما أن تنفيذ البرنامج يتمثل في البحث عن برهان بنائي لهذه العبارة واستخلاص مثال من ذلك.

ما الشيء المقسّم بشكل أفضل؟.

البرمجة بواسطة البراهين

طبعاً سيصبح من المخاطرة تحميل الحاسوب وحده مسؤولية إيجاد البراهين بخصوص المشكلات المعقدة. هكذا، يمكننا أن نزود البرامج بعلامات موجهة لبحث البرهان، إضافة إلى تعريف ما ينبغي برهنته. ومن بين وسائل تزويد العلامات المتعلقة ببحث البرهان في حالة خاصة، هناك وسيلة تقديم البرْهنة على حالة عامة. وعلى سبيل المثال، لقد تقدم بخصوص حساب العدد السابق، البرهنة على عبارة «بالنسبة لكل x غير مساوية للصفر، توجد y بحيث أن y سابقة على x». هكذا، فعندما نستخدم هذا البرنامج بالاعتماد فرضاً على العدد 12 ونكون مطالبين بالبحث عن برهنة على عبارة «توجد y بحيث إن y سابقة على 12»، سيكتفي استعمال البرهنة على حالة عامة لبناء برهنتنا.

في هذا الصنف من اللغة، تتمثل البرمجة في تحديد ما الذي ينبغي حسابه بواسطة عبارة ما، ثم كيف ننجز الحساب من خلال البرهنة على العبارة المذكورة. ذلك أن القيام بالحساب يستدعي تعيين برهنة حالة خاصة بدقة، وإيجاد المثال في البرهنة البنائية. والحال، أن تطبيق لغات البرمجة هذه يتطلب قبل كل شيء، أنظمة لمعالجة البراهين

(بالمعنى الذي نتحدث فيه عن «أنظمة معالجة النصوص»)، أي أنظمة تبحث عن البراهين وتتحقق من تصحيح البراهين المصوغة من عمق البرامج وتجد أمثلة داخل البراهين البنائية... إلخ. لكن تصوّر مثل هذه الأنظمة يستدعي نظرية في الاستدلال. توجد إذاً على الدوام، مشكلات من مستوى ثان داخل الرياضيات، تقترن بتصور طرق لحل المشكلات وآلات للحساب ولغات للبرمجة... إلخ. ويبدو هذا المسعى التأملي وثيق الصلة بالاستدلال ذاته. لذلك، فإن حل هذه المشكلات يتطلب نظرية من مستوى ثان، أي نظرية في الاستدلال.

المزيد من الأجوبة

لنتطرقْ الآن إلى المشكلات العادية (من مستوى أول)، التي تستدعي حلاً من مستوى ثان.

مسلّمات الهندسة

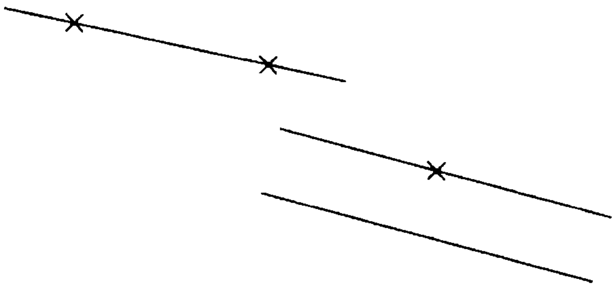
تتضمّن الهندسة التي صاغها إقليدس مسلّمة تُعد بأن بين نقطتين متمايزتين لا يمر سوى مستقيم واحد، وأخرى تقول: من نقطة خارج مستقيم معين لا يمرّ إلا مواز واحد (بمعنى أن المستقيمَيْن لا يمران من النقطة نفسها). وقد واجهت هذه المسلّمة الأخيرة، المعروفة **بمسلّمة التوازي** الاعتراض منذ مدة طويلة. فقد اعتبر العديد من علماء الهندسة بأن هذه العبارة لا تتوصل إلى البداهة المطلوبة لتكون مسلّمة، بل تتخذ شكل نتيجة يتعيَّن البرهنة عليها. ولأن إقليدس لم يتمكن على الأرجح من البرهنة على هذه العبارة، فإنه لا يجوز لنا طرحها كمسلّمة.

هكذا ظلت بعض المشكلات بدون حلول لعدة سنوات، بل لعدة قرون، دون أن يقترح أحد أخذ

ملفوظها كمسلّمة. طبعاً، حاولت أجيال من العلماء الرياضيين تأسيس الهندسة بدون هذه المسلّمة واستنباطها من المسلّمات «الحقيقية» للهندسة، أي من المسلّمات الأخرى لإقليدس. لكن محاولتهم باءت بالفشل، إلى حد أن الرياضيين بدأوا يتساءلون في القرن التاسع عشر، عما إذا لم تكن مسلّمة التوازي قابلة للبرهنة داخل المسلّمات الأخرى لإقليدس.

وإذا كانت هذه المسلّمة غير قابلة للبرهنة، فإن بإمكاننا أن نختار بين إقرار أو إقرار عكسها دون أي غموض. بذلك، ظهرت **الهندسات اللاإقليدية** للوجود. فقد ابتكر نيكولاي إيفانوفيتش لوباتشيفسكي Nicolaï Ivanovitch Lobatvhevsky (1792–1856) وجانوس بوليي Janos Bolyai (1802–1860) هندسة يمكن بمقتضاها أن تمر من نقطة خارج مستقيم عدة مستقيمات، دون أن تتقاطع مع المستقيم الأول. كما ابتكر بيرنارد ريمان Bernhard Remann (1826–1866) هندسة يمكن بمقتضاها ألا يمر من نقطة خارج مستقيم أي مستقيم لا يتقاطع مع المستقيم الأول (بصيغة أخرى، فإن المستقيمين يتقاطعان دوماً). هكذا، تم تعويض المشروع الهادف إلى البرهنة على مسلّمة المتوازيات بمشروع عكسي وهو البرهنة على تماسك

الهندسات اللاإقليدية، أي استحالة البرهنة على مسلّمة المتوازيات (الشكل 6):



مسلّمتان هندسيتان. من نقطتين مختلفتين يمر مستقيم واحد (بالأعلى)؛ من نقطة خارج مستقيم يمر مستقيم واحد لا يتقاطع مع الأول.

بهذا المقتضى، فهم بوانكاريه كيف أن المسلّمات تعبر عن دلالة كلمات اللغة. فإذا وضعنا المسلّمة التي تفيد بأن من نقطة خارج مستقيم تمر عدة مستقيمات دون أن تتقاطع مع المستقيم الأول، فإن كلمات «مستقيم»، «نقطة»، و«تمرّ» لم تعد لها الدلالة السابقة نفسها. ويجب الإقرار بأن صياغة هذه العبارات تمت بلغة أجنبية تكون فيها الكلمات بالصدفة، وحسب تعبير خورخي لويس بورخيس، هي نفسها الموجودة بلغتنا، إلا أن دلالتها مختلفة.

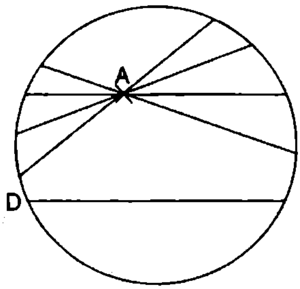
بالتالي، سنكون أحرارا بأن نقرر بكون «النقطة»، بالمعنى المعطى لها في هذه اللغة، هي إحدى نكهات التوت

البري أو الليمون أو المشمش؛ وأن المستقيم هو عبارة عن بوظة بنكهتين، وبأن «المستقيم» «يمرّ» عبر «النقطة» إذا كانت هذه النكهة مندرجة ضمن مكون البوظة المذكورة. وتُعد المسلّمتان صحيحتين ضمن هذا التأويل، ما دام من «نقطتين» مختلفتين لا «يمر» سوى «مستقيم» واحد.

هكذا، من «نقطة» خارج «مستقيم» معين لا «يمر» سوى «مستقيم» واحد، بحيث إن «المستقيمين» لا «يمران» من «النقطة» نفسها.

يمكننا بهذه الطريقة تأويل لغة الهندسة عبر الإقرار بأن «النِقاط» هي نقاط قرص بالمعنى العادي وبأن «المستقيميْن» هما شكلان، توجد أطرافها بدائرة هذا بالقرص. وأخيراً، فإن «المستقيم» «يمر» عبر «نقطة»، إذا كان المستقيم يمر عبر النقطة بالمعنى المألوف.

في ظل هذا التأويل، ستكون مسلّمات لوباتشيفسكي-بوليي صحيحة. خصوصاً المسلّمة التالية: من «نقطة» خارج «مستقيم» «تمر» عدة «مستقيمات» دون أن «تتقاطع» مع المستقيم الأول. فـ«المستقيمات» الأربعة في الرسم التالي مثلاً، «تمر» جميعها عبر «النقطة» A، ولا «يتقاطع» أي واحد منها مع «المستقيم» D. (الشكل 7):



تأويل هندسة لوباتشيفسكي – بوليي: من «نقطة» خارج «مستقيم»، «تمر» عدة «مستقيمات»، دون أن «تتقاطع» مع المستقيم الأول.

لو كانت هندسة لوباتشيفسكي وبوليي غير متماسكة، لكان بإمكاننا البرهنة على الشيء ونقيضه. وبتأويلنا للكلمات بهذه الطريقة نستطيع القيام بهذه البرهنة في هندسة إقليدس المألوفة، التي ستصبح غير متماسكة أيضاً. لقد قمنا إذاً بالبرهنة على التماسك النسبي لهندسة لوباتشيفسكي – بوليي، مقارنة بهندسة إقليدس. فالأولى متماسكة إذاً، ولا يمكن لمسلّمة المتوازيات أن تُستنبط من مسلّمات إقليدس الأخرى، ويمكننا أن نبيّن بطريقة مماثلة على أن هندسة ريمان (التي تفيد بأنه من نقطة خارج مستقيم، لا يمر أي مستقيم لا يتقاطع مع المستقيم الأول)،

متماسكة أيضاً. إذا كانت هذه الهندسات قد ظلت مدة طويلة مثيرة للفضول، حيث تجلت أهميتها الوحيدة في إبراز عدم قابلية مسلّمة المتوازيات للبرهنة، فإنها برزت في القرن العشرين كأدوات فعالة جداً في الفيزياء وخصوصاً في نظرية النسبية العامة.

هكذا، شكّلت تأويلات نظرية داخل نظرية أخرى وبراهين التماسك النسبي موضوعاً **لنظرية النماذج**. وقد تم تطوير هذا النوع من المنطق الذي يُعدُ اليوم من أنشط الفروع، من طرف تارسكي وغودل حوالي سنة 1930، لكنه اختمر داخل مسألة مسلّمة التوازي.

فرضية المتصل

لقد حققت نظرية المجموعات أيضاً نجاحات أخرى في معالجتها لمشكلات عميقة. هكذا، بيّن كانتور كيف أن بعض المجموعات اللامتناهية كانت تتوصّل على عدد العناصر نفسها، بينما لم تكن مجموعات أخرى تتوصّل على ذلك. وعلى سبيل المثال، هناك من الأعداد الصحيحة بقدر ما ثمّة من الأعداد الزوجية؛ لأن بإمكاننا وضع تقابل بين الأولى والثانية (الشكل 8):

$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 2$
$2 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 6$ ... إلخ.

لكن هناك أعداد حقيقية (أي أعداد صحيحة وغير صحيحة) أكبر من الأعداد الصحيحة، لأننا لا نستطيع وضع تقابل بين هاتين المجموعتين.

فالأعداد الصحيحة تشكل «أصغر لامتناهي»، أي أن كل مجموعة لامتناهية تتضمّن عدداً مماثلاً من العناصر أو أكثر، مقارنة بمجموعة الأعداد الصحيحة. وطبعاً، فإن كانتور طرح السؤال حول معرفة ما إذا كانت هناك مجموعات متناهية متموقعةً بين مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد الحقيقية؟ أم أن هذه المجموعات متتالية؟ يتعلق السؤال إذاً بمعرفة ما إذا كان من الممكن، أو من غير الممكن، بناء مجموعة متضمنة لعناصر أكثر من الأعداد الطبيعية، لكنها أقل من الأعداد الحقيقية. وفي سنة 1940 بيّن غودل استحالة هذا الأمر، ليس بإظهار أن عدم وجود مثل هذه المجموعة قابل للبرهنة في نظرية المجموعات، بل بإبراز كيف أن وجودها غير قابل للبرهنة. بعد ذلك، وتحديداً في سنة 1963، بيَّن بول كوهن Paul Cohen (مولود سنة 1934) بأن عدم وجود هذه المجموعة، هو أيضاً غير

قابل للبرهنة. بالتالي، يُعدُ وجود مثل هذه المجموعة بمثابة عبارة غير محددة في نظرية المجموعات.

إن الفكرة التي تفيد بأن دراسة الاستدلال تقدم أشكالاً أخرى لنظرية المجموعات، ترتكز بشكل ضمني على الفكرة الخاطئة التي مفادها أن كل مشكلة يمكن أن تُحَلَّ بطريقة تقليدية. والحال، أن من بين نتائج مبرْهنة غودل هو أننا نرى أشياء أكثر عندما نغادر النظرية التي نُجري الاستدلال فيها، كي نلاحظها من الخارج. بالتالي، ينبغي أن نحل بعض المشكلات، باستعمال صيغة استدلالية أدق تتمثل في الأستدلال على الاستدلال. وتُعد هذه المسألة ضرورية بشكل خاص، عندما تكون العبارة التي نسعى إلى البرهنة عليها غير محددة بالنظرية التي نريد أن نبرهن عليها من الداخل، كما هو الشأن هنا بخصوص مسلّمة التوازي أو بفرضية المتصل؛ ذلك أن الاستدلال على الاستدلالات يتطلب نظرية في الاستدلال.

أجوبة أفضل

لا تتلاءم الفكرة التي تفيد بأن الجميع يستدل بشكل صائب «وطبيعي»، مع الملاحظة التي تقر بوجود نوع من التناقض بين مختلف الأطروحات الفلسفية والسياسية أو الدينية التي نسمع عنها في حياتنا. ففي بعض الحالات، نعترف بأن الأطروحات التي لا نتبناها متماسكة، إلا أنها ترتكز على مسلّمات أو مبادئ مختلفة عن تلك المتوفرة لدينا. وغالباً ما نعتقد بكل بساطة، بأن هذه الأطروحات غير متماسكة وبالتالي أن مؤلفيها لم يستدلوا بشكل صحيح.

في القرن الثالث عشر، حاول رايمون لول ابتكار لغة اصطناعية لدفع معاصريه إلى اعتناق الدين المسيحي، فقد اعتقد بأن استعمال هذه اللغة سيظهر بأن الحجة المسيحية هي «الحسنة». من ثمّ، فإن لول كان يدافع ضمنياً عن الأطروحة التي تفيد بأن جميع الناس لا يستدلّون بشكل صحيح وخصوصاً بأن اللغة الطبيعية هي مصدر الالتباسات المنطقية. بعد خمسة قرون، شَرَّعَ لايبنتز أيضاً بأن النزاعات السياسية والدبلوماسية ستحل من تلقاء ذاتها لو تم التعبير

عنها بلغة خالصة.

لكن يبدو أن الرياضيات أقل تعرضا لهذا النوع من المنازعات، مقارنة باللاهوت أو السياسة. مع ذلك، فبالرغم من فصل المفاهيم وإزالة الالتباسات المقترنة بتعقد اللغة الطبيعية، لا يخلو تاريخ الرياضيات من منازعات حول المقصود بالاستدلال الصحيح. ويمكن أن يتعلق هذا النقاش بنقطتين وهما: المسلّمات وقواعد الاستنباط.

اللامتناهي الصِغر

شكلت المسلّمات المتعلقة بمفهوم العدد **اللامتناهي الصغر** مجالاً للمنازعات بشكل خاص. فقد استعمل كل من إسحاق نيوتن (1642–1727) ولايبنتز بسذاجة الأعداد اللامتناهية الصغر في الحساب التفاضلي Infinitésimal Calcul لتعريف **مفهوم المشتقة** مثلاً. غير أن رياضيي القرن التاسع عشر، أمثال أوغستين كوشي Augustin Cauchy (1789–1857) وبرنار بولزانو Bernhard Bolzano (1781–1848) وكارل فيرستراس Karl Weierstrass (1815–1897)... إلخ. انتقدوا هذا المفهوم، لأن العدد اللامتناهي الصغر يجب في نظرهم أن يكون أصغر من كل الأعداد، وبالخصوص أصغر من نصفه؛ وهذا أمر غير متماسك.

لهذا، أبعدوا هذا المفهوم وقدموا صيغة للحساب التفاضلي متحررة منه تماماً.

وقد سمحت دراسة الاستدلال بإحياء هذا المفهوم المُتخلى عنه على مدى أكثر من قرن. ففي ستينيات القرن العشرين، قدم أبرهام روبنسون Abraham Robinson (1918–1974) صيغة جديدة لنظرية الأعداد اللامتناهية الصغر (أي التحليل غير النمطي) وبيّن تماسكها. والملاحظة الأساسية لروبنسون، هي أن من الممكن أن نضيف إلى نظرية الأعداد الرمز e ومسلّمات تفيد بأن هذا العدد لامتناهي الصغر، أي أنه أصغر من 1، 1/2، 1/3، 1/4... إلخ. دون السقوط في التناقض. وبالفعل، إذا تمكنا من البرهنة على الشيء ونقيضه في نظرية الأعداد هذه التي تم إغناؤها، فإن هذه البراهين لن تحتاج إلا لعدد نهائي من المسلّمات الجديدة e أصغر أو تساوي 1 ($1 \geq e$)، e أصغر أو تساوي 1/2 ($e \geq ½$)، e أصغر أو تساوي 1/3 ($e \geq 3/1$)... إلخ. وبتأويلنا للعدد e باعتباره أصغر n/1 مستعمل، سنحصل على تناقض داخل النظرية العادية للأعداد.

تتميز صيغة روبنسون عن الصيغة الكلاسيكية المتناقضة التي تتخذ ضمنياً مسلّمة وحيدة تفيد أن بالنسبة لكل عدد صحيح n تكون e أقل من n/1، بدل أن تتخذ

مسلّمة مختلفة بالنسبة لكل عدد. هكذا، تؤدي التغييرات الطفيفة في صياغة هذه النظرية إلى تجاوز الحدود الفاصلة بين التماسك والتناقض. من ثمّ، فإن معرفة المسلّمات التي يمكن استعمالها للاستدلال بواسطة أعداد لامتناهية الصغر، ليست بديهية ولو بالنسبة للأفراد المتوفرين على حس سليم. كما أن معرفة المسلّمات التي يتعيَّن استخدامها للاستدلال على المجموعات ليس بديهية، إذ أن المحاولات الأولى في هذا الإطار كانت غير متماسكة.

وقد سمحت دراسة الاستدلال بإظهار التماسك النسبي لبعض النظريات، وبالتالي بإبراز المسلّمات التي يمكننا استعمالها وأيضاً المسلّمات غير المتماسكة، بالرغم من كون المنطق أبان بالخصوص عن عجزه أمام نظرية المجموعات عند استخدامه لبرهنة النقصان الثانية لغودل.

الثالث المرفوع

لنتوقفْ هذه المرة عند نزاع آخر يتعلق بقواعد الاستنباط. وقد أثير هذا النزاع عند بداية القرن العشرين من قِبل لويتزن إيغبيرتوس يان بروير L.E.J.Brouwer (1881–1966). وقد سبق أن عرضنا للخلاف بين التصورات الأفلاطونية والتصورات المناهضة لها، بخصوص الحقيقة.

فحسب الأفلاطونيين تكون العبارات صحيحة أو خاطئة باستقلال عما نعرفه عنها، كما أن البراهين تمكننا (جزئيا) من بلوغ هذه الحقيقة. وعلى العكس من ذلك، اعتبر معارضو الأفلاطونيين بأن البراهين هي التي تمنح الحقيقة للملفوظات.

إلى حد الآن، لا يتعلق الأمر سوى باختلاف في تأويل دور الاستدلال الذي لم يؤثر على صواب الاستدلالات ذاتها، على ما يبدو. فبإمكان شخص كتابة استدلال معين وبإمكان شخص آخر قراءته وقَبوله بالرغم من كونهما لم يحدِّدا الدور نفسه لهذا الاستدلال (مثلاً الكشف عن حقيقة هذه النتيجة أو ابتكارها). وتصبح الوضعية أهم عندما يؤدي هذا الاختلاف في التأويل إلى اختلاف في تحديد معنى البرْهنة الصحيحة.

لنعدْ إلى رواية ريمون شاندلر الموسومة بـ *النوم الطويل* التي تنتهي دون أن نعرف قاتل أحد الشخوص. سيتفق الجميع على أن العبارتيْن التاليتيْن: «قتل اللواء السائق» و«لم يقتل اللواء السائق» غير محدَّدتين. لكن ما قولنا بخصوص العبارة التالية: «قتل اللواء السائق أو لم يقتل اللواء السائق»؟.

بالنسبة للأفلاطونيين لا نعرف ما إذا كانت عبارة «قتل اللواء السائق» صحيحة أو خاطئة، لكنها إما صحيحة

إما خاطئة في حد ذاتها. فإحدى العبارتين، «قتل اللواء السائق» و«لم يقتل اللواء السائق»، صحيحة (وإن كنا لا نعرف بالضبط هذه الجملة)، بالتالي فإن عبارة «قتل اللواء السائق أو لم يقتل اللواء السائق» صحيحة. بالمقابل، يرى مناهضو الأفلاطونيين بأن عبارتي «قتل اللواء السائق» و«لم يقتل اللواء السائق» ليستا صحيحتين، مثلما ليستا خاطئتين، ما دامت كل منهما غير محددة. وبما أن أية عبارة من العبارتين غير صحيحة، فإن عبارة «قتل اللواء السائق أو لم يقتل اللواء السائق» ليست صحيحة وهي غير محددة أيضاً.

بشكل عام فإن تصور بروير للحقيقة، المناهض للأفلاطونيين، دفعه إلى رفض إبعاد إحدى قواعد الاستدلال الكلاسيكي وهي قاعدة الثالث المرفوع التي تسمح بالبرهنة على عبارة «(أ) أو لا (أ)» دون البرهنة على عبارة (أ) وعلى نفيها. ويُعد الاستدلال المبني بدون هذه القاعدة «حدسياً». كما أن عبارة «لا (لا ألف)» مماثلة لعبارة (ا) حسب التصور الأفلاطوني، بينما يرى المفهوم الحدسي بأن العبارتين ليستا متكافئتيْن بالضرورة. بذلك، فإن التعارض بين الأفلاطونيين والحذْسيين لا يرجع إلى اختلاف بسيط في تأويل تطبيق الرياضيات؛ فهذا التعارض يؤثر في التطبيق

ذاته، لأنه يقتضي اختلافاً في تحديد معنى البرهان نفسه.

لنقدمْ مثالاً آخر، يختلف عن السابق، كونه مشكلة رياضية حقيقية. يُعدُ العدد كسرياً nombre rationnel عندما يكون مساوياً لقسمة عددين صحيحيْن 1/2، 1/3، 3/4... إلخ. ونسجل الجذر المربع للعدد 2: $\sqrt{2}$ الذي ليس بعدد كسري كما هو معروف منذ الأزمنة القديمة. ونقوم بالبرهنة على وجود عدد غير كسري يعطى عدداً كسرياً إذا ما رُفع إلى أس الجذر المربع للعدد 2 ($\sqrt{2}$). وإذا ما تمكنّا من البرهنة على أن العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ كسري، فستكون المشكلة سهلة الحل ما دام العدد $\sqrt{2}$ ملائماً، فهو عدد غير كسري وإذا رفعناه إلى أس $\sqrt{2}$ فسنحصل على $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ الكسري فرضياً. زيادة على ذلك، إذا تمكنا من البرهنة على أن العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ غير كسري، ستكون المشكلة سهلة الحل أيضاً، ما دام العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ملائماً، فهو عدد غير كسري فرضياً؛ وإذا ما رفعناه إلى أس فسنحصل على العدد 2 الكسري.

وحسب التصور الأفلاطوني، فإن واقع كون العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ كسرياً أم غير كسري قائم بذاته، وكوننا لا نعرف ذلك قبلياً لا يمنع من افتراض أن هذا العدد إما كسري أو غير كسري. بالتالي، يمكننا البرهنة على العبارة أعلاه عبر ملاحظة أن العدد $\sqrt{2}$ يجيب على المشكلة إذا ما كان $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

كسرياً، وأن العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ سيجيب عليها إذا لم يكن الأمر كذلك. وهذه البرهنة صحيحة وستظل على حالها حتى ولو كانت مسألة كسرية العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ غير محسومة بواسطة المسلّمات. أما حسب التصور المناهض للأفلاطونية فإن العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ يُعدُ كسرياً على العكس، إذا ما تمكنا من البرهنة على أنه كذلك، ويُعدُ غير كسْري إذا ما تمكنا من البرهنة على أنه كذلك أيضاً، ولا يُعدُ كسْرياً ولا غير كسري إذا لم تُحسمِ المسألة بواسطة المسلّمات. إذاً، طالما لم نبرهن على أي شيء، فإننا لن نتمكن من افتراض أن العدد كسري أو غير كسري، كما أن هذه البرهنة لا تكون متماسكة.

البراهين البنائية

لكي نقيم برهانا حدسياً على العبارة أعلاه، يجب إذاً البرهنة على أن العدد كسري أو البرهنة على أنه ليس كذلك. وقد تبيَّن من خلال هذا المثال أن بإمكاننا البرهنة على أن هذا العدد ليس كسرياً وبنّاء ببرهنة حدسية. ولن نحتاج في هذه البرهنة الأخيرة إلى التمييز بين حالتين، إذ يكتفي ملاحظة إجابة العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ على المشكلة ما دام غير كسري والحصول على عدد كسري عبر رفعه إلى أس $\sqrt{2}$.

ثمّة اختلاف عميق بين هذه البرهنة والبرهنة

الكلاسيكية؛ فالبرهنة الحدسية تبيّن بأن هناك عدداً يسمح بالتحقق من الخاصية المطلوبة عبر الاستشهاد بمثل هذا العدد، في حين كانت البرهنة الكلاسيكية تكتفي بتبيان أن هذا العدد موجود، دون أن تقدم مثالاً أو، بشكل أدق، بتقديم مثالَيْن ممكنيْن، دون الحسم بينهما. وتجلب برهنة الوجود المتجلية عبر «بناء» المثال، معلومة إضافية تُعد أيضاً بنائية. وما لاحظناه في هذه الحالة الخاصة هو واقع عام، ذلك أن البرهنة الحديثة تظل بنائية على الدوام. وسيكون المثال واضحاً في البرهنة المباشرة مثل البرهنة التي أشرنا إليها. لهذا، لكي نجد مثالاً في البرهان غير المباشر، علينا البدء بتحويله إلى برهان مباشر.

هل سيستولي الحدْسيون على السلطة؟.

ليست قواعد الاستنباط عبارة عن حقائق مُنزَّلة، فكما أن المسلّمات تُعبّر عن دلالة الألفاظ المستعملة داخل نظرية ما، كذلك تُعبّر هذه القواعد عن دلالة ألفاظ مثل «و»، «أو»، «لو»، «بالنسبة لكل x»، «يوجد x»... إلخ. بالتالي، فإن تغيير قواعد الاستنباط والتخلي عن الثالث المرفوع، يعنيان تغيّر دلالة هذه الكلمات. ومن المنظور الحدسي بالخصوص، تبين عبارة «توجد x بحيث إن A»، عن

معرفة الموضوع الذي يسمح بالتحقق من خاصية «A»، بينما تُفصح هذه العبارة من المنظور الكلاسيكي، وبشكل أضعف، عن وجود موضوع في مكان ما، يسمح بالتحقق من هذه الخاصية حتى ولو كنا نجهل موضعها. فالدلالتان المقترنتان بألفاظ مثل «و»، «أو»، «لو»، «بالنسبة لكل x»، «يوجد x»... إلخ. لا يمكن أن تستبعد إحداهما الأخرى. ومن الممكن أن ندمج في نفس اللغة ألفاظا ذات دلالة حدسية وأخرى ذات دلالة كلاسيكية.

وبالفعل، فإن هذه القواعد تحدد بشكل شامل، دلالة الألفاظ «و»، «أو»، «لو»، «بالنسبة لكل x»، «يوجد x»... إلخ. لأن كل القواعد تساهم في تحديد كل لفظ من هذه الألفاظ. لهذا، بإمكان إضافة قاعدة جديدة أن تغير دلالة كل رموز اللغة. وقد اقترح غودل عدة طرق لإدماج هذين الصنفين من الكلمات في لغة وحيدة. ففي سنة 1933 بيَّن بأن من الممكن التعبير عن الرموز الحدسية داخل المنطق الكلاسيكي الواسع بواسطة صيغة جديدة وهي: «نعرف البرهنة على». هكذا تُترجَم «A أو B» الحدسية بعبارة «نعرف البرهنة على «A» أو نعرف البرهنة على «B»». ولا يُعدُ الثالث المرفوع صالحا لفهم لفظة «أو»، ما دامت عبارة «نعرف البرهنة على «A» أو نعرف البرهنة على «لا

A» غير قابلة للبرهنة في المنطق الكلاسيكي.

وعلى العكس من ذلك، بيَّن غودل سنة 1941 أن بإمكاننا التعبير عن الصيغ الكلاسيكية داخل المنطق الحدسي. ف «A أو B» الكلاسيكية تترجم بـ «لا لا (A أو B)»، وسيكون الثالث المرفوع صالحا بالنسبة لهذا الفهم للفظة «أو»، ما دامت عبارة «لا لا A أو لا A» قابلة للبرهنة في المنطق الحدسي. كما أن عبارة «يوجد x» الكلاسيكية تترجم بـ«لا لا يوجد x». مثلاً، يمكننا انطلاقاً من البرهنة أعلاه، أن نبيِّن برهنة حدسية على العبارة «لا لا يوجد عدد غير كسري، يعطي عند رفعه إلى أس $\sqrt{2}$ عدداً كسرياً».

وغالباً ما اتسم النقاش بين المعارضين والمدافعين عن الثالث المرفوع بالطابع السجالي. فقد اعتبر الحدسيون بأن البراهين الكلاسيكية كانت خاطئة؛ واتهم المدافعون عن الرياضيات الكلاسيكية الحدسيين بمحاولة هدم الرياضيات من الداخل. وعلى العكس من ذلك، يمكننا *فيما بعد*، أن نجعل النزعة الحدسية بمثابة ارتقاء داخل الخطاب، عبر تدقيقها من جديد لألفاظ «و»، «أو»، «لو»، «بالنسبة لكل x»، «يوجد x»... إلخ. بالتالي، تبدو معرفة قواعد الاستنباط التي يمكن استعمالها للاستدلال مسألة صعبة، بل ومضطربة، وتسمح دراسة الاستدلال في هذا المقام بتقدم

المشكلة، أولاً عبر الإبانة على أن واقع قَبول أو رفض الثالث المرفوع، هو مشكل متعلق قبل كل شيء، بدلالة الرموز المنطقية، وثانياً عبر اقتراح لغات تدمج رموزاً متضمنة لهذين الصنفين من الدلالة.

إسهام نظرية الاستدلال

يمكننا إذاً تصنيف إسهامات نظرية الاستدلال بالنسبة لمن يمارس الاستدلال وذلك عبر فئات مختلفة. من البدء، آثرنا منذ شروعنا في الاستدلال مشكلات من المستوى الثاني، وطبعاً فإن حل البعض منها يقتضي استدلالات من المستوى الثاني أيضاً. ثم، إن بعض المشكلات العادية من المستوى الأول تتطلب حلاً من المستوى الثاني. وأخيراً، يبدو أن اختيار المسلّمات وقواعد الاستنباط يتسم أحياناً بالصعوبة؛ ويمكن لنظرية في الاستدلال أن تساعد على تبرير البعض من هذه الاختيارات.

وغالباً ما تفسَّر ضرورة استخدام نظرية الاستدلال لحل بعض المشكلات بالاعتماد على خاصية الاستدلال ذاته. مثلاً، نحن نثير مشكلات من المستوى الثاني، مرتبطة بوجود طرق لحل بعض أصناف المشكلات، لأن الاستدلال لا يُختزل في الحساب. وتتطلب بعض المشكلات العادية

حلاً من المستوى الثاني، لأن هناك في كل نظرية عبارات غير محدَّدة. في الأخير، ترتبط صعوبة اختيار المسلّمات بواقع أن تماسك النظرية لا يفرض نفسه من تلقاء ذاته.

تلك إذاً هي خصائص الاستدلال التي تسمح، في جزء كبير منها، بجعل نظرية الاستدلال مفيدة بل ولازمة من أجل حل بعض المشكلات، وأيضاً باعتبار تطور المنطق مرحلة ضرورية ومعلَنَة في تاريخ الفكر الاستنباطي.

معجم المصطلحات

antiplatonicien: مناهض للأفلاطونية. يتعلق الأمر بفكر مضاد للأفلاطونية، تُعد البراهين بمقتضاه مبتكرة لحقيقة نتائجها (وليست مجرد معلنة عنها).

axiome: مسلّمة. وهي عبارة تُقبل حقيقتُها دون برهان.

Burali-Forti: بورالي فورتي (عالم رياضي، انظر نظرية المجموعات).

(accessible au) calcul: قابل للحساب (بسهولة) تُعد العبارة قابلة للحساب عندما تتضمّن في صياغتها إشارة إلى الخطوات التي يتعيَّن اتباعها لإقرار حقيقتها.

cohérence: تماسُك. خاصية مميزة للنظرية، تتمثل في عدم تضمنها لمفارقة، أي في عدم قيامها بالبرهنة على الشيء ونقيضه في الوقت نفسه.

Cohérence relative: تماسُك نسبي.

(Démonstration de) cohérence relative: برهنة أوّلية على تماسك نظرية ما، شريطة أن تكون نظرية أخرى متماسكة.

conclusion: نتيجة. عبارة مُبرهن عليها بواسطة الاستدلال (انظر مصطلح المقدمة).

contradiction: تناقض. خاصية نظرية تتضمّن مفارقة، أي قيامها بالبرهنة على الشيء ونقيضه.

déduction: استنباط (انظر قاعدة الاستنباط).

démonstration: برهان.

démonstration Constructive: برهان بنائي. هو برهان الوجود الذي يصدر انطلاقاً من مثال.

démonstration d'une phrase: البرهان على عبارة ما. الاستدلال هو برهنة على عبارة ما، إذا كانت هذه العبارة هي آخر ما يُستدل عليه.

démonstration directe: برهان مباشر. برهان غير متضمّن لدورات، أي لمرحلة متمثلة في البرهنة على عبارة عامة من أجل تطبيقها بعد ذلك، على حالة خاصة. بالمقابل، فإن البرهان المتضمّن لدورات يُعدُّ غير مباشر.

dérivée: مشتقة. عدد يقيس تزايد الدالة في نقطة معينة. وقد عرف كل من نيوتن ولاينتز مشتقة دالة f بنقطة x بوصفها علاقة $f(x+e) - f\left(\frac{x}{2}\right)$، حيث تُعد e عدداً متناهي الصغر.

ensembles: مجموعات (انظر نظرية المجموعات).

Epimenide: إبيمندوس. فيلسوف من جزيرة كريت اشتهر بعبارته المفارقة التالية: «كل سكان كريت كذابون». وهناك صيغة حديثة لهذه المفارقة ضمن عبارة: «أنا أكذب».

épistémologie: إبستيمولوجيا. فرع من الفلسفة يدرس العلوم وطرائقها.

géométrie: هندسة. فرع من الرياضيات يعالج الأشكال داخل المستوى والمكان. وقد ظلت الهندسة باعتبارها أول نظرية قدمها إقليدس بشكل استنباطي، ومنذ مدة، النموذج الأصل للمنهج الاستنباطي.

non euclidienne géométrie: هندسة لا إقليدية. نظرية غير متضمنة لمسلّمة المتوازيات. ففي هندسة لوباتشيفسكي وبوليي، من نقطة خارج مستقيم، تمر عدة مستقيمات لا تتقاطع مع المستقيم الأول. وفي هندسة ريمان، لا يمر أي مستقيم.

Hilbert (projet ou programme de): مشروع أو برنامج هيلبرت. مشروع اقترحه هيلبرت عند بداية العشرينيات من القرن الماضي، يقضي من جهة بإيجاد طريقة في الحساب تبيّن إذا كانت عبارة ما قابلة أو غير قابلة للبرهنة، ومن جهة أخرى، بالبرهنة بشكل

أولي على تماسك الاستدلال المستخدم للامتناهي.

hypothèse du continu: **فرضية المتّصل**. هي فرضية صاغها كانتور، لا توجد بمقتضاها أي مجموعة متضمّنة لعناصر أكثر من مجموعة الأعداد الصحيحة أو أقل من مجموعة الأعداد الحقيقية (سواء كانت صحيحة أو لم تكن). وهذه العبارة غير محدّدة في نظرية المجموعات.

incomplétude: **نقصان**. خاصية نظرية تشمل عبارة غير محدَّدة، أي غير قابلة للبرهنة، مثلما هو الشأن بخصوص دحضها. أما التمامية فهي خاصية نظرية لا تتضمّن عبارة غير محددة، أي عبارة تبرهن دوماً على الشيء أو نقيضه.

induction: **استقراء**. طريقة لبلوغ الحقيقة تتمثل في قبول واقعة عامة انطلاقاً من ملاحظات جزئية. وهذه الطريقة ضرورية في العلوم التجريبية رغم أنها تسمح بقبول أشياء خاطئة، مما يستدعي أحياناً مراجعة النتيجة المحصّل عليها عندما لا تكون متوافقة مع التجربة.

infiniment petit: **لامتناهي الصغر**. انظر العدد اللامتناهي الصغر

intuitionnisme: **نزعة حدسية**. هي في الأصل عبارة عن

تيار فكري يمنح الأفضلية للحدس على الاستدلال. وبالتعميم تطلق صفة الحدسية على تيارات الفكر الرافضة للتصور الأفلاطوني للحقيقة وللثالث المرفوع.

mathématique : رياضيات. علم يدرس العوالم المجردة واللامتناهية عموماً. في نفس الاتجاه، تُعد الرياضيات خطاباً مؤسساً حصرياً على الاستدلال.

méthode de calcul: طريقة الحساب. إجراء نسقي يسمح بحساب موضوع أو بإقرار حقيقة عبارة ما. وتعتبر طريقة الحساب، التي تقدم نتيجة أو تستمر في الحساب إلى ما لا نهاية، طريقة جزئية، في تناقض مع الطريقة الحقيقية التي تصل دوماً إلى نتيجة.

modèles: نماذج. انظر نظرية النماذج.

nombre infiniment petit: عدد لامُتناهي الصغر. مفهوم استخدمه كل من إسحاق نيوتن وغوتفريد فيلهلم لايبنتز في حساب التفاضل. وقد سمح عدم تماسك النظرية «الساذجة» للأعداد اللامتناهية الصغر لرياضيي القرن التاسع عشر بالتخلي عن هذا المنطق. وفي ستينيات القرن الماضي، اقترح أبرهام روبنسون نظرية متماسكة حول هذا المفهوم وهي نظرية التحليل غير المعياري.

observation: ملاحظة. تجرى هذه الوسيلة في العلوم التجريبية من أجل إقرار حقيقة عبارة بواسطة الإدراك الحسي.

ordinateur: حاسوب. آلة حسابية شاملة، قادرة على إجراء أي حساب. نظير ذلك يمكننا تعريف الحاسوب بوصفه آلة للاستدلال.

paradoxe: مفارقة. عبارة قابلة للبرهنة هي ونقيضها، في نظرية معينة.

parallèles (axiome des): مسلّمة التوازي. هي مسلّمة هندسة إقليدس مفادها أن من نقطة خارج مستقيم معطى، يمر مستقيم واحد لا يتقاطع مع الأول.

platonicien: أفلاطوني.

يقترن بتيار فكري يفيد بأن العبارات صحيحة أو خاطئة، باستقلال عن البراهين التي تكشف عن حقيقتها.

prémisse: مقدمة. عبارة تتخذ كفرضية داخل الاستدلال. ويتعين أن تكون مقدمات الاستدلال مسلّمات أو عبارات سبقت البرهنة عليها بواسطة استدلال آخر (انظر مصطلح «نتيجة»).

problème de l'arrêt: مشكلة التعطيل. هي مشكلة معرفة ما إذا كانت طريقة الحساب تؤدي إلى نتيجة أو إلى حسابات لامتناهية. وهذه المشكلة تحل بواسطة الحساب.

raisonnement: **استدلال**. تسلسل للعبارات بحيث تكون كل واحدة منها، إما مسلّمة أو مستنبطة من عبارات سابقة بواسطة قاعدة الاستنباط.

récurrence (axiome de): **مسلّمة التراجع**. هي مسلّمة نظرية الأعداد الصحيحة. فإذا كان العدد 0 يسمح بالتحقق من خاصية ما، وإذا كان العدد n يسمح في كل مرة بالتحقق من هذه الخاصية، فإن العدد n + 1 يسمح أيضاً بالتحقق منها لأن كل الأعداد الصحيحة تسمح بالتحقق من الخاصية المذكورة.

مثلاً، مع الخاصية x=0+x نحصل على «إذا كان 0+0=0 وإذا كان بالنسبة لكل n، n = 0+ n، إذن n+1=0+(n+1) بالتالي بالنسبة لكل x، x=0+x»

réductible au calcul: **قابل للاختزال في الحساب**. تُعد نظرية ما قابلة للاختزال في الحساب، إذا وجدت طريقة في الحساب تشير إلى إمكانية أو عدم إمكانية البرهنة على عبارة ما.

règle de déduction: **قاعدة الاستنباط**. تشير هذه القاعدة إلى كيفية استنباط عبارة من مجموعة من العبارات الأخرى. مثلاً، يمكننا انطلاقاً من القضيتين «إذا كانت A هي إذاً B» و«A»، أن نستنبط «B».

Russel: راسل. انظر نظرية المجموعات.

sciences expérimentales : علوم تجريبية. هي العلوم التي تدرس العالم المادي. وهي تقابل الرياضيات التي يتسم عالمها بالتجريد.

scientisme: نزعة علمية (أو علموية). هو الايمان المفرط بإمكانيات العلوم. ففي المنطق نستطيع أن نربط بهذه النزعة تأكيدات مفادها أن هناك طريقة نسقية تبين ما إذا كانت عبارة ما، قابلة أو غير قابلة للبرهنة، وأن لكل مشكلة حلاً، أو أن الصرامة الصورية تضمن يقين الاستدلال. وقد تم تكذيب هذه التأكيدات بواسطة نتائج تشورش وتورينغ وغودل.

sophisme: مغالطة. استدلال صحيح منطقياً في الظاهر، لكن الغرض منه هو الخداع.

théorie: نظرية. يتعلق الأمر في مجال المنطق، بمجموعة من المسلّمات.

théorie des ensembles: نظرية المجموعات. تعالج هذه النظرية المجموعات، أي مجموعة الموضوعات التي تتقاسم خاصية مشتركة. وتعود المحاولة الأولى لوضع هذه النظرية لكانتور وفريج، غير أنها أبانت أنها غير متماسكة، وهو ما بيّنته مفارقات بورالي وفورتي (1897) وراسل (1902). وبالفعل، فإن مجموعة المجموعات التي لا تشمل ذاتها بذاتها،

تكون مشمولة وغير مشمولة بذاتها في الوقت نفسه. وهناك نظريات معدلة لها، مقترحة من طرف زيرميلو (1908) ثم وايتهيد وراسل (1910).

théorie des modèles: نظرية النماذج. فرع من المنطق يدرس تأويلات نظرية داخل أخرى، خصوصاً من أجل بناء براهين متماسكة نسبياً.

tiers exclu: الثالث المرفوع. قاعدة استنباطية كلاسيكية، تسمح بتأكيد عبارة «(أ) أو (لا أ) «دون البرهنة على «أ» ولا على «لا أ». وقد رفض الحدسيون هذه القاعدة.

variable: متغير. حرف يستخدم للإشارة إلى موضوع غير محدَّد جزئيا. وقد اقترح فريج وبيرس استعمال المتغيرات والعبارات مثل «بالنسبة لكل x» و«توجد x»، لبناء عبارات عامة.

vérification exhaustive: تحقق شامل. وسيلة لإقرار حقيقة عبارة علمية تتمثل في التحقق من كل حالة من الحالات الخاصة. وعندما يكون عالم الخطاب لا متناهياً فإن التحقق الشامل يصبح مستحيلاً.

ثبت بالمراجع

مفاهيم أولية

CORI, R. et LASCAR, D., *Logique mathématique*, Masson, coll. «Axiomes», 1993.

GOCHET, P. et GRIBOMONT, P., *Logique*, Hermès, 1990.

المنطق واللغات الطبيعية

NEF, F., *La Logique du langage naturel*, Hermès, 1989.

المسلّمات:

HILBERT, D., *Les Fondements de la géométrie*, 1899, Dunod, 1971.

POINCARÉ, H., *La Science et l'Hypothèse*, 1902, Flammarion, coll. «Champs », 1968.

المنطق والعالم الواقعي:

DUMMETT, M., *Les Origines de la philosophie analytique*, 1987, Gallimard, coll. «Essais», 1991.

NEF, F. *Logique, Langage et Réalité*, Éditions universitaires,1991.

مبرهِنة غودل:

GÖDEL, K., NAGEL, E., NEWMAN, J.R. et GIRARD, J.-Y., *Le Théorème de Gödel*, Le Seuil, 1989.

SMULLYAN, R., *Les Théorèmes d'incomplétude de Gödel*, Masson, coll. «Axiomes », 1993.

النزعة الحدسية وطبيعة الحقيقة الرياضية:

DUMMETT, M., *Philosophie de la logique*, 1978, Minuit, coll. «Propositions », 1991.

LARGEAULT, J., *L'Intuitionisme*, Presses universitaires de France, coll. «Que sais-je ? », 1992.

المنطق

يتضمن هذا الكتاب قسمين أساسيين: قسم متعلق بطبيعة الاستدلال أكد فيه المؤلف، بلغة بسيطة وواضحة، على ما يميز الاستدلال عن الملاحظة والحساب. وقد سعى فيه إلى الإجابة عن سؤال مركزي وهو: هل يمكن اختزال الاستدلال في الحساب؟ أما القسم الثاني فركز فيه على ما يمكن أن ندعوه بحوار المنطق والحساب، حيث اعتبر بأن تطور الاستدلال واكب تطور الرياضيات باعتبارها علماً استنباطياً [أي منطقياً].

وبدل اختزال الحساب في الاستدلال أو العكس، دعا جيل دويك إلى منح الحساب وضعاً خاصاً في العلوم لحل بعض المشكلات التي ظلت عالقة على مدى قرون من الزمن، وهو ما تدعّم بفضل تطور المعلوميات في الوقت الحالي؛ مما يؤكد التكامل الحاصل بين مجالي المنطق والرياضيات.

مكتبة الفكر الجديد

28-03-2020

السعر 40 درهماً

9 789948 234005

كلمة KALIMA

أبوظبي AbuDhabi Culture & Tourism للثقافة والسياحة

المعارف العامة
الفلسفة وعلم النفس
الديانات
العلوم الاجتماعية
اللغات
العلوم الطبيعية والدقيقة
الفنون والألعاب الرياضية
الأدب
التاريخ والجغرافيا وكتب السيرة
أطفال وناشئة