YAKOV PIRLMAN

الغاز رياضية

ياكوف بيريلمان

الرياضيات المسلية

حكايات وألغاز رياضية

ترجمة

الدكتور إبراهيم محمود شوشة

الأهلية

ياكوف بيريلمان

الرياضيات المسلية

حكايات وألغاز رياضية

سجل في مكتبة

اضغط الصفحة

SCAN QR

الأهليّة للنشر والتوزيع

e-mail: alahlia@nets.jo

الفرع الأوّل (التوزيع)

المملكة الأردنيّة الهاشميّة، عمّان، وسط البلد، بناية 12

هاتف 4638688 6 00962، فاكس 4657445 6 00962

ص. ب: 7855 عمّان 11118، الأردن

: AlAhliaBookstore

: alahlia_bookstore

الفرع الثاني (المكتبة)

عمّان، وسط البلد، شارع الملك حسين، بناية 34

◆

الرياضيات المسلية / ألغاز رياضية

حكايات وألغاز رياضية

ياكوف بيريلمان

ترجمة **إبراهيم محمود شوشة**

◆

طبعة الأهلية الأولى، 2018

◆

الترقيم الدولي: ISBN 978-6589-09-958-1

ألغاز رياضية

ياكوف بيريلمان

الرياضيات المسلية

حكايات وألغاز رياضية

ترجمة

الدكتور إبراهيم محمود شوشة

مكتبة

t.me/soramnqraa

الأهلية

1

إفطار مع ألغاز

1- السنجاب في المرج. حكى أحد الجالسين حول مائدة الإفطار في بيت الراحة فقال لعبت صباح اليوم لعبة «استغماية» مع السنجاب. أتعلمون أنه يوجد في غابتنا مرج دائري تنتصب في وسطحه شجرة بتولا وحيدة؟ وكان السنجاب يختفي عني وراء هذه الشجرة. وعند خروجي من الغابة إلى الفسحة لاحظت فوراً وجه السنجاب، بعينيه الحيتين، يتطلع إليّ من خلف الجذع. وبحذر، وبدون أن أقترب، مشيت على طرف الحقل لكي أنظر إلى هذا الحيوان. درت حول الشجرة أربع مرات ولكن السنجاب كان يتراجع حول الجذع في الاتجاه العكسي بحيث إنني كنت أرى وجهه فقط. وهكذا لم أستطع أن أدور حول السنجاب.

علق أحدهم: ولكن أنت تقول إنك قد درت حول الشجرة أربع مرات.

- حول الشجرة وليس حول السنجاب!

- ولكن، أليس السنجاب فوق الشجرة؟

- وماذا في ذلك؟

- إنك أيضاً درت حول السنجاب.

- كيف أكون قد درت حول السنجاب وأنا لم أرَ ظهره ولا مرة واحدة.

- ما لنا وما للظهر؟ لقد كان السنجاب في المركز، وأنت تسير في دائرة، هذا يعني أنك كنت تسير حول السنجاب.

- هذا لا يعني ذلك أبداً. فلتتخيل أنني أسير حولك في دائرة، وأنت تدور بحيث يكون وجهك مواجهاً لي طول الوقت مخفياً بذلك ظهرك. هل تقول إنني أدور حولك في هذه الحالة؟

- طبعاً أقول إنك تدور حولي، وكيف يمكن غير ذلك؟

- أدور على الرغم من أنني لا أصبح خلفك ولا أرى ظهرك؟

- وماذا يعني الظهر! لقد أغلقت حولي الطريق - هنا جوهر المسألة، وليس في أن ترى ظهري.

وسأل أحد المحاورين شيخاً جالساً وراء المنضدة:

- فلتسمح لي: ماذا يعني الدوران حول شيء ما؟ أعتقد أنه يعني شيئاً واحداً: أن تقف دوماً في أماكن بحيث ترى الشيء من جميع الاتجاهات. أليس ذلك صحيحاً يا بروفيسور؟

فأجاب العالِم:

- الاختلاف عندكم يكمن أساساً في الكلمات، وفي مثل هذه الحالات يلزم البدء دائماً من الشيء الذي تحدثتم عنه الآن فقط، وهو الاتفاق على معنى الكلمات. كيف يمكن فهم كلمات

«التحرك حول شيء ما»؟ يمكن أن يكون معنى هذه الكلمات ثنائياً. يمكن أولاً: أن يفترض بهذه الكلمات التحرك في خط مقفل ويوجد الشيء داخله. وهذا أحد المفاهيم. أما المفهوم الآخر فهو: التحرك بالنسبة لهذا الشيء بحيث يمكن رؤيته من جميع الجهات. لو أخذنا المفهوم الأول فلا بد وأن تعترف بأنك قد درت أربع مرات حول السنجاب. ولكن لو أخذنا المفهوم الثاني فلا بد وأن تقول إنك لم تدر حول السنجاب ولا مرة واحدة. وكما ترون فإنه لا توجد هنا أسباب للمناقشة إذا تكلم الطرفان بلغة واحدة وفهما الكلمات بطريقة واحدة.

– حسناً جداً، ممكن أن نسمح بمفهومين. ولكن أي منهما الأصح؟

– لا تجب صياغة السؤال هكذا. يمكن الاتفاق على أي شيء. ولكن من الأفضل السؤال، ما الذي يتفق مع المفهوم المعترف به عموماً. ولقلت إن المفهوم الأول يرتبط أكثر بروح اللغة، وسأقول لكم لماذا. فالشمس كما هو معروف تدور دورة كاملة حول محورها في زمن يزيد على 25 يوماً بقليل.

– الشمس تدور؟

– طبعاً، كالأرض تدور حول محورها. ولكن تصور أن دوران الشمس يتم أبطأ، وبالذات أنها تكمل دورة لا في 25 يوماً ولكن في ¼ 365 يوم، أي في عام. عندئذ لكانت الشمس تواجه الأرض دائماً من جانب واحد، أما الجانب الثاني لها أي «ظهر

الشمس» فما كنا لنستطيع أن نراه. ولكن هل يمكن أن يقول أحد اعتماداً على هذا أن الأرض لا تدور حول الشمس؟

- نعم، الآن غدا مفهوماً أنني قد درت حول السنجاب.

وقال أحد المستمعين للمناقشة:

- لدي اقتراح أيها الرفاق! لا تتفرقوا. بما أنه لن يخرج أحد للنزهة في المطر ولن ينتهي المطر قريباً، فلنقضي الوقت هنا مع الألغاز. لقد وضعت البداية. فليؤلف كل حسب دوره أو يتذكر أحد الألغاز. وأنت أيها البروفيسور ستكون كبير محكمينا.

وقالت امرأة شابة:

- إذا كانت الألغاز مع الجبر أو الهندسة فإني لن أشترك.

أضاف أحدهم:

- وأنا أيضاً.

شكل 1. تراجع السنجاب الماكر في الاتجاه المعاكس

- لا، لا، لا بد وأن يشترك الجميع! وسنرجو الموجودين ألا يستعملوا الجبر أو الهندسة ما عدا المبادئ البسيطة جداً. لا اعتراض من أحد؟

- في هذه الحالة أنا موافقة ومستعدة أن أكون الأولى في تقديم لغز.

قال المجتمعون من كل اتجاه:

- عظيم جداً، تفضلي ابدئي من فضلك!

2- في المطبخ المشترك. وُلد لغزي في ظروف شقة ريفية. فالمسألة، كما يقال، من الحياة اليومية. وضعت إحدى الساكنات - وسأسميها ثريا للتسهيل- في الفرن المشترك 3 قطع من الحطب الذي تملكه، أما الساكنة سلوى فوضعت 5 قطع، والساكن زيد الذي لم يكن لديه حطب، طلب الإذن من الساكنتين بأن يطبخ طعامه على النار المشتركة. ولتغطية التكاليف قام بدفع 8 كوبيكات للجارتين. كيف يجب على الجارتين أن تتقاسما هذه الكوبيكات الثمانية؟

أسرع أحدهم في القول:

- مناصفة، فإن زيد قد استخدم نارهم بنفس المقدار.

فاعترض آخر قائلاً:

- طبعاً لا، يجب أن نأخذ في الاعتبار كيف اشترك في هذه النار ما وضعته المواطنتان من حطب. فمن وضع 3 قطع، يجب أن يأخذ 3 كوبيكات، ومن وضع 5 قطع يأخذ 5 كوبيكات. وستكون هذه قسمة حق.

أخذ الكلمة الرجل الذي بدأ اللعبة وأصبح بعد الآن رئيس الاجتماع فقال:

– أيها الرفاق، دعونا لا نعلن الحلول النهائية لهذه الألغاز الآن. فلنترك كل واحد يفكر بشأنها. وليعلن لنا الحَكَم الإجابات أثناء العشاء. أما الآن فالكلمة للشخص التالي. دورك أيها الرفيق الكشاف.

3 . عمل حلقات الدراسة المدرسية. قال الكشاف:

– في مدرستنا توجد 5 حلقات دراسية: الحدادة، والنجارة، والتصوير، والشطرنج، والكورال. حلقة الحدادة تعمل يوماً واليوم التالي راحة، وحلقة النجارة تعمل يوماً ويومين راحة، أما حلقة التصوير فتعمل يوماً وثلاثة أيام راحة، وحلقة الشطرنج تعمل يوماً وأربعة أيام راحة، أما حلقة الكورال فتعمل يوماً وخمسة أيام راحة. وفي أول يناير اجتمعت في المدرسة كل الحلقات الخمس، ثم ابتدأت الدراسة تبعاً للنظام الموضوع في الخطة دون الإخلال بجدول الدراسة. والسؤال يتركز في عدد الأمسيات التي اجتمعت فيها كل الحلقات الخمس خلال الثلاثة أشهر الأولى.

سألوا الكشاف:

– وهل كانت السنة عادية أم كبيسة؟

– عادية، أي أن الثلاثة أشهر الأولى: يناير وفبراير ومارس يجب حسابها بـ 90 يوماً؟

– شيء بديهي.

قال البروفيسور:

- فلتسمح لي أن أضيف إلى لغزك لغزاً ثانياً، كم في نفس ربع السنة كانت مثل هذه الأمسيات، التي لم تجر فيها دراسة في أي من الحلقات الخمس.

رن صوت أحدهم:

- آه. إني أفهم! مسألة ماكرة. لن يكون هناك بعد ذلك أي يوم تجتمع فيه الحلقات الخمس، ولن يكون هناك أي يوم لا تجتمع فيه الحلقات. إن هذا واضح!

وسأل رئيس الاجتماع:

- لماذا؟

- لا أستطيع أن أشرح ذلك، ولكنني أحس، أنهم يريدون أن «يخفقوا» بمن يحل هذا اللغز في خطأ.

- لكن هذا ليس بمبرر. وفي المساء سيتضح إن كان إحساسكم هذا صحيحاً أم لا. دورك الآن أيها الرفيق.

4- من أكثر؟ قام اثنان خلال ساعة بتعداد جميع الأشخاص الذين مروا بهما على رصيف الشارع. وقف أحدهم عند بوابة منزل، والآخر أخذ يروح ويجيء على الرصيف. فمن عد أكبر عدد من المارة؟

قال صوت من الطرف الآخر للمنضدة:

- بسيرك ستعد أكثر، إنه أمر واضح.

وأعلن رئيس الاجتماع:

- سنعرف الإجابة عند العشاء، من التالي!

5- الجد والحفيد. حدث ما سأتحدث عنه في عام 1932. كان عمري وقتها يبلغ عدد السنين التي يبينها الرقمان الأخيران من عام مولدي. وعندما حدثت جدي عن هذه العلاقة أثار دهشتي عندما قال إن مع سنه أيضاً يحدث نفس هذا الشيء. لقد بدا لي ذلك غير ممكن...

قال أحدهم:

- شيء مفهوم، إنه غير ممكن.

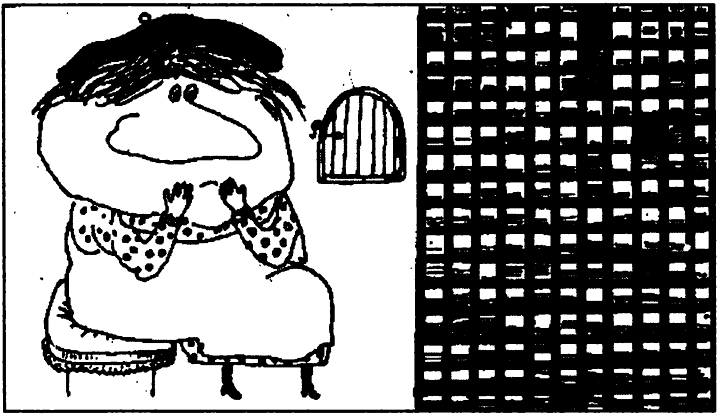
- لكن تصوروا أنه ممكن جداً، لقد أثبت لي جدي ذلك. فكم من السنين كان عمر كل منا؟

6- تذاكر السكة الحديدية. وقالت المشتركة التالية في اللعبة:

- أنا عاملة صرف تذاكر بالسكة الحديدية. يبدو للكثيرين أنها مهنة سهلة. ولا يفكرون في العدد الكبير من التذاكر التي يجب على الصراف أن يبيعه حتى لو كان يعمل في محطة صغيرة. إذ يجب أن يستطيع المسافرون الحصول على تذاكر من هذه المحطة إلى أي محطة أخرى على نفس الخط في الاتجاهين. وأنا أعمل على خط فيه 25 محطة. كم تعتقدون هو عدد الأشكال المختلفة من التذاكر المُعَدَّة من قِبَل سكك الحديد لكل شبابيكها؟

قال رئيس الاجتماع:

- دورك أيها الرفيق الطيار.



شكل 2. اصرف تذاكر السكك الحديدية

7- **طيران الهليكوبتر.** طار من لينينجراد هليكوبتر مباشرة إلى الشمال. وبعد أن طار في اتجاه الشمال 500 كم، غيّر اتجاهه إلى الشرق. وبعد أن قطع في هذا الاتجاه 500 كم غيّر اتجاهه ثانية إلى الجنوب وسار في هذا الاتجاه 500 كم. ثم غيّر اتجاهه إلى الغرب وطار 500 كم، وهبط. المطلوب معرفته: أين هبطت طائرة الهليكوبتر بالنسبة للينينجراد: إلى الغرب أم إلى الشرق أم إلى الشمال أم إلى الجنوب؟

قال أحدهم:

- أنت تفترض السذاجة في من يحل هذه المسألة... خطوة للأمام، ثم 500 خطوة إلى اليمين، ثم 500 خطوة إلى الخلف، ثم 500 خطوة إلى اليسار. إلى أين نجيء؟ من حيث خرجنا سنعود ثانية!

- والآن، أين تظنون مكان هبوط الهليكوبتر؟

– في نفس مطار ليننجراد من حيث ارتفع. أليس كذلك؟

– طبعاً ليس كذلك.

– إذن، أنا لا أفهم.

وتدخل في الحديث جاره فقال:

– فعلاً، يوجد هنا شيء غامض. ألم تنزل طائرة الهليكوبتر في لينجراد؟ ألا يمكن إعادة المسألة؟

واستجاب الطيار إلى طلبه عن طيب خاطر. وأنصت إليه الحاضرون بكل انتباه، ونظر كل واحد إلى الآخر باستغراب.

قال رئيس الجلسة: حسناً، حتى العشاء نستطيع أن نفكر في هذه المسألة. أما الآن فسنكمل.

8– **الظل**. فلتسمحوا لي –تكلم صاحب الدور التالي– أن موضوع لغزي هو موضوع الهليكوبتر نفسه: أيهما أعرض الهليكوبتر أم ظله الكامل؟

– هل هذا هو كل اللغز؟

– نعم كله.

وجاء الجواب بالحل فوراً:

– بالطبع الظل أعرض من الهليكوبتر، أليست أشعة الشمس تتباعد كمروحة اليد.

واعترض أحدهم:

- إنني أرى العكس فإن أشعة الشمس متوازية. إذن يكون الظل والهليكوبتر بعرض واحد.

- كيف ذلك؟ ألم يحدث لك أن رأيت كيف تمتد أشعة الشمس من خلف سحابة؟ عندئذ يمكن بالعين المجردة التأكد من أن أشعة الشمس تتباعد الواحد عن الآخر. ويجب أن يكون ظل الهليكوبتر أكبر بكثير من الهليكوبتر، مثلما يكون ظل السحابة أكبر من السحابة نفسها.

- ولكن لماذا تعتبر أشعة الشمس عادة متوازية؟ فالبحارة وعلماء الفلك جميعهم يرون ذلك...

ولم يسمح رئيس الاجتماع للمناقشة أن تحتدم وأعطى الكلمة للشخص التالي لتقديم لغزه.

9- **مسألة بأعواد الكبريت.** أخرج الخطيب التالي أعواد الكبريت من العلبة وأخذ يقسمها إلى ثلاث أكوام.

وقال الحاضرون مازحين:

- هل تعتزم إشعال نار؟

فقال الخطيب:

- اللغز سيكون بالكبريت. ها هي ثلاث أكوام غير متساوية. ويوجد فيها جميعاً 48 عوداً. ولن أقول لكم كم عود في كل كومة. ولكن تذكروا الآتي: إذا وضعنا من الكومة الأولى في الكومة الثانية عدداً من الأعواد مساوياً لما هو موجود في هذه الكومة الثانية، ثم من الثانية وضعنا في الثالثة عدداً من الأعواد مساوياً لما هو موجود

في هذه الكومة الثالثة، وأخيراً من الكومة الثالثة نضع في الكومة الأولى عدداً من الأعواد يساوي العدد الموجود فيها - أقول إنه إذا فعلنا هذا كله فإن عدد الأعواد في كل الأكوام الثلاث سيكون متساوياً. كم من الأعواد كان في كل من الأكوام الثلاث في البداية؟

10- الجذمور الماكر. بدأ جار آخر المتحدثين كلامه قائلاً: هذا اللغز يذكرني بالمسألة التي عرضها عليّ مؤخراً أحد الرياضيين القرويين.

لقد كانت قصة كاملة مسلية بما فيه الكفاية. قابل أحد القرويين في الغابة عجوزاً لا يعرفه. وصارا يتحدثان. نظر العجوز إلى القروي بتمعن وقال:

- أعرف في هذه الغابة جذعاً عجيباً يساعد جداً عند الشدة.

- كيف يساعد؟ هل يشفي؟

- عن الشفاء فهو لا يشفي، ولكنه يضاعف النقود. تضع أسفله محفظة فيها النقود وتعد حتى المائة فتجد أن النقود في المحفظة قد تضاعفت. إنه يتمتع بهذه الخاصية. جذمور رائع!

قال الفلاح حالماً:

- أريد أن أجربه.

- هذا ممكن ولكن يجب الدفع.

- الدفع لمن؟ وهل كثير؟

- تدفع لمن يريك الطريق. أي تدفع لي. أما هل تدفع كثيراً، فأمره يحتاج إلى حديث خاص.

وأخذا يفاصلان. وبعد أن عرف العجوز أن في محفظة الفلاح قليلاً من المال، وافق على أن يأخذ بعد كل مضاعفة روبلاً واحداً و20 كوبيكاً، واتفقا على ذلك.

قاد العجوز الفلاح إلى وسط الغابة، وسار معه كثيراً وأخيراً بحث وسط الأحراش عن جذمور شجرة شوح قديم مغطى بالأعشاب. أخذ من يدي الفلاح المحفظة ووضعها بين جذور الجذمور. وعد حتى المائة ثم أخذ العجوز يبحث عند أسفل الجذمور، وأخيراً أخرج من هناك المحفظة وأعطاها للفلاح.

نظر الفلاح في المحفظة ووجد أن النقود قد تضاعفت فعلاً! فأخذ العجوز منها روبلاً واحداً و20 كوبيكاً وطلب منه أن يضع المحفظة مرة أخرى تحت الجذمور صانع المعجزات.

ومرة أخرى عدّا حتى المائة، ثم أخذ العجوز مرة ثانية في البحث عند الجذمور وتضاعف عدد النقود مجدداً. ومرة ثانية حصل العجوز من الفلاح على الروبل والـ 20 كوبيكاً المتفق عليها.

وللمرة الثالثة قاما بإخفاء المحفظة أسفل الجذمور. وفي هذه المرة أيضاً تضاعفت النقود. ولكن عندما الفلاح أعطى العجوز المكافأة المتفق عليها لم يبقَ في المحفظة ولا كوبيكاً واحداً. وفَقَد المسكين في هذه العملية كل نقوده. ولم تعد هناك نقود لمضاعفتها وغادر الغابة مكتئباً.

إن سر معجزة تضاعف النقود طبعاً واضح لكم، فالعجوز لم يكن يعبث في جذور الجذمور بدون شيء. ولكن هل تستطيعون

الإجابة على سؤال آخر وهو: كم كان مع الفلاح من نقود قبل إجراء التجارب الشرير مع الجذمور الماكر؟

11- مسألة عن ديسمبر. بدأ الحديث الكهل الذي جاء دوره في تقديم لغز فقال:

- أنا، أيها الرفاق، متخصص في اللغة، وبعيد عن كل ما يتعلق بالرياضيات. ولذلك فلا تتوقعوا مني مسألة رياضية. أستطيع فقط أن أقترح مسألة من المجال الذي أعرفه. فلتسمحوا لي بأن أقدم لغزاً خاصاً بالتقويم.

- تفضل!

- يسمى الشهر الثاني عشر عندنا بديسمبر. ولكن أتعرفون ماذا تعني كلمة «ديسمبر»؟ تأتي هذه الكلمة من الكلمة الإغريقية «ديسا» أي عشرة، ومن هنا أيضاً الكلمة «ديسالتر» - أي عشرة لترات، وكلمة «ديكاد» أي عشرة أيام... وكلمات أخرى. يتضح من هنا أن ديسمبر يحمل معنى «العاشر». كيف يمكن شرح عدم التطابق هذا؟

قال رئيس الاجتماع:

- حسناً، والآن بقي لغز واحد.

12- الحيلة الحسابية.

لقد جاء دوري الأخير الثاني عشر. وسأقدم لكم حيلة حسابية على سبيل التغيير وأرجو منكم أن تبينوا أين يكمن سرها. فليكتب أي منكم، وليكن مثلاً رئيس جلستنا، أي عدد ثلاثي على ورقة ودون أن أراه.

– هل يمكن أن تكون هناك أصفار في هذا العدد؟

– لا أضع أي قيود. أي عدد ثلاثي يعجبكم.

– لقد كتبت. وماذا الآن؟

– اكتب بجانبه نفس العدد مرة أخرى. سيحصل لديكم، بالطبع، عدد سداسي.

– نعم، عدد سداسي.

– ناول الورقة إلى جارك، الذي يجلس أبعد بالنسبة لي. واطلب منه أن يقسم هذا العدد السداسي على سبعة.

– من السهل القول: أقسم على سبعة، ولكن قد لا يقبل العدد القسمة على سبعة.

– لا تخف سيقسم بدون باق.

– أنت لا تعرف العدد، ومع ذلك واثق من أنه سيقسم على سبعة.

– أقسم أولاً، ثم سنتكلم بعد ذلك.

– من حظك أن العدد قد قسم.

– أعط النتيجة لجارك بدون أن تقول لي شيئاً. وسيقسمه هو على 11.

– تظن أن الحظ سيحالفك مرة أخرى، وستقسم؟

– اقسم، ولن يتبقى باق.

– فعلاً لم يتبق باق! والآن ماذا؟

– ناول النتيجة لجارك. وليقسمه... على 13 مثلاً.

– لقد أسأت الاختيار. فقليل من الأعداد تقسم على 13 بدون باق... كلا ليس كذلك، لقد قسمت بدون باق. إنك لمحظوظ.

– أعطني الورقة التي كتبت عليها النتيجة، ولكن اطوها بحيث لا أرى النتيجة.

وبدون أن يفتح الورقة، أعطى رئيس الجلسة الورقة إلى صاحب اللغز.

– خذ مني الرقم الذي قد اخترته أولاً. أهو صحيح؟

فأجاب هذا باندهاش وهو ينظر إلى الورقة: صحيح.

– هذا هو العدد الذي اخترته فعلاً... والآن بما أن كشف المتحدثين قد انتهى فلتسمحوا بأن نختتم اجتماعنا، ولحسن الحظ قد انتهى المطر. وسيتم حل كل هذه الألغاز اليوم بعد العشاء. وتستطيعون أن تقدموا لي الأوراق الحاوية على الإجابات.

حل الألغاز 1–12

1– تم بحث لغز السنجاب الذي في المرج بالكامل سابقاً ننتقل إلى اللغز التالي.

2– لا يجب، كما يفعل الكثيرون، اعتبار أن 8 كوبيكات قد دفعت مقابل 8 قطع، أي مقدار كوبيك واحد لكل قطعة. لقد

دفعت هذه النقود مقابل الثلث فقط من القطع الثمانية واستخدم النار ثلاثة بنفس القدر. من هنا يندم أن كل الـ 9 قطع قد ثُمِّنت بـ 8 × 3، أي 24 كوبيكاً وثمن القطعة الواحدة 3 كوبيكات.

والآن يمكن حساب كم يبلغ نصيب كل فرد من الأشخاص من النقود. فإن سلوى تحصل على 15 كوبيكاً ثمناً لخمس قطع، ولكنها استعملت الفرن لقاء 8 كوبيكات، إذن يتبقى لها 15–8، أي 7 كوبيكات. ويجب أن تتقاضى ثريا 9 كوبيكات ثمناً لقطعها الثلاث من الحطب، ولو طرحنا 8 كوبيكات ثمناً لاستخدامها الفرن، فيكون المتبقي لها 9–8 أي كوبيك واحد.

وهكذا فعند التقسيم الصحيح يجب أن تأخذ سلوى 7 كوبيكات، ثريا كوبيكاً واحداً.

3– الإجابة على السؤال الأول - بعد كم يوم ستجتمع في المدرسة كل الحلقات الخمس في آنٍ واحد، يمكن الإجابة على ذلك ببساطة لو استطعنا أن نجد أصغر عدد من كل الأعداد التي تقسم بدون باقٍ على 2 و3 و4 و5 و6. ومن السهل أن نقول إن هذا العدد هو 60. إذن ففي اليوم 61 ستجتمع مرة ثانية كل الحلقات الخمس: حلقة الحدادة بعد 30 فترة ثنائية الأيام، النجارة بعد 20 فترة ثلاثية الأيام، التصوير بعد 15 فترة رباعية الأيام، الشطرنج بعد 12 فترة خماسية الأيام والكورال بعد 10 فترات سداسية الأيام. لا يمكن إقامة مثل هذه الحفلة قبل مرور 60 يوماً. وستقام الحفلة المماثلة التالية التي ستجتمع فيها كل الحلقات الخمس بعد مرور 60 يوماً، أي في ربع السنة التالي.

وهكذا يتضح خلال ربع السنة الأول أن هناك أمسية واحدة تجتمع فيها بالنادي مرة ثانية كل الحلقات الخمس للدراسة.

والأصعب من ذلك إيجاد إجابة على السؤال الثاني في المسألة وهو: كم سيكون عدد الأمسيات التي لن تجتمع فيها أي من الحلقات؟ لكي نبحث عن هذه الأيام، يلزم كتابة كل الأعداد من 1 إلى 90 بالترتيب، ونحذف في هذا الصف أيام عمل حلقة الحدادة أي الأعداد 1، 3، 5، 7، 9...إلخ، وبعد أن نحذف أيام عمل حلقات التصوير، والشطرنج، والكورال، تتبقى تلك الأيام من ربع السنة الأول التي لا تعمل فيها ولا حلقة.

من يقوم بهذا العمل سيتأكد من أن عدد الأمسيات التي لن تعمل فيها الحلقات خلال ربع السنة الأول سيكون كثيراً وهو: 24. وسيبلغ عددها في يناير 8 أمسيات وبالتحديد الثاني، والثامن، والاثنى عشر، والرابع عشر، الثامن عشر، والعشرين، والرابع والعشرين، والثلاثين منه. وفي فبراير توجد 7 من هذه الأيام، وفي مارس 9 منها.

4- كلاهما عد عدداً متساوياً من المارة. على الرغم من أن الشخص الذي كان يقف عند البوابة عد الذين يمرون في كلا الاتجاهين، ولكن الذي كان يتمشى رأى عدداً من المارة يزيد بمرتين على ما رآه الآخر.

يمكن أن نفكر بطريقة ثانية. عندما عاد الشخص، الذي كان يتمشى على الرصيف لأول مرة إلى رفيقه الواقف فإنها قد عدّا عدداً متساوياً من المارة، فكل فرد مر أمام الواقف قابل أيضاً (في هذا أو ذاك الاتجاه من الطريق) الشخص الذي يسير (وبالعكس). وكل مرة

عاد فيها الذي يسير إلى رفيقه الواقف، فإن الذي كان يسير عدّ أيضاً عدداً من المارة مساوياً لما عدّه الواقف. نفس الشيء كان في نهاية الساعة عندما تقابلا لآخر مرة، وأبلغ كل منهما للآخر نتيجة العد.

5- من النظرة الأولى قد يبدو فعلاً أن المسألة وضعت خطأ: ينتج كما لو كان الحفيد والجد من سن واحدة. ولكن مطلوب المسألة، كما سنرى الآن، يتحقق ببساطة.

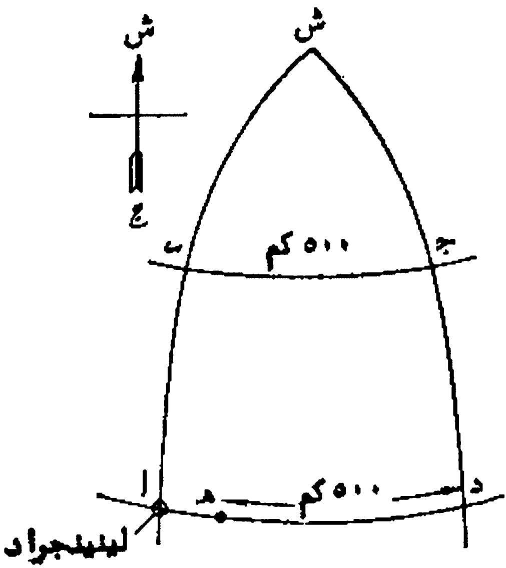
من الواضح أن الحفيد قد وُلد في القرن العشرين. أول رقمين في سنة ميلاده بالتالي هما 19 وهو عدد المئات. العدد المكوَّم من الأرقام الأخرى بجمعها على نفس العدد يجب أن تكون 32. هذا يعني أن العدد هو 16 وسنة ميلاد الحفيد هي 1916، وكان في عام 1932 يبلغ السادسة عشرة من العمر.

وجده وُلد، بالطبع، في القرن التاسع عشر، وأول رقمين من سنة ميلاده هما 18، العدد المضاعف المتكون من الأرقام الأخرى يجب أن يكون 132. هذا يعني أن نفس هذا العدد يساوي نصف 132. أي 66. أي أن الجد قد وُلد في سنة 1866 وكان في عام 1932 يبلغ السادسة والستين من العمر.

وهكذا فإن عمري الحفيد والجد في سنة 1932 كانا يتمثلان بالعدد المتكون من الرقمين الأخيرين من سنتي ميلادهما.

6- في كل محطة من المحطات الـ 25 يمكن أن يطلب المسافرون تذكرة لأي من المحطات، أي إلى 24 نقطة. أي أنه يجب طبع 25 × 24 = 600 تذكرة مختلفة.

وإذا ما كان الركاب يستطيعون الحصول على تذاكر ليس في اتجاه واحد فقط (ذهاباً)، ولكن عند الرغبة يمكنهم أن يحصلوا على تذاكر عودة (ذهاباً وإياباً) وفي هذه الحالة يرتفع عدد أشكال التذاكر مرتين، أي يكون من اللازم توفر 1200 شكل مختلف.



شكل 3

7- هذه المسألة لا تحتوي على أية تناقضات. لا يجب أن نفهم أن طائرة الهليكوبتر طارت على محيط مربع. إذ لا بد وأن نأخذ في الاعتبار الشكل الكروي للأرض. وتتركز الفكرة في أن خطوط الطول تقترب من بعضها في الشمال (شكل 3)، ولذلك فبقطع 500 كم على محيط دائرة متوازية واقعة على بُعد 500 كم شمالي خط

العرض الواقعة عليه مدينة لينينجراد تكون طائرة الهليكوبتر قد ابتعدت إلى الشرق بعدد كبير من الدرجات، أكثر من التي قد قطعها في الاتجاه المضاد إلى أن يصل إلى خط العرض الذي تقع عليه مدينة لينينجراد. ونتيجة لذلك فبإنهاء الهليكوبتر للطيران يكون إلى الشرق من مدينة لينينجراد.

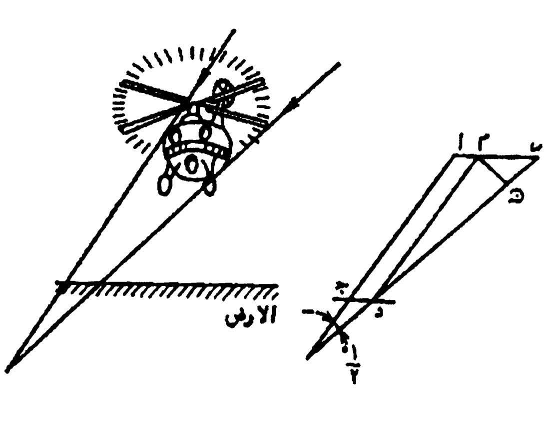
ولكن إلى أي مدى شرقاً؟ هذا يمكن حسابه. ترون على الشكل 3 خط سير الهليكوبتر أ ب ج د هـ. نقطة ش – القطب الشمالي. وفي هذه النقطة يتقابل خطا الزوال أب، دج. قطع الهليكوبتر أولاً 500 كم إلى الشمال، أي بخط الزوال أ ش. ونظراً لأن طول درجة خط الزوال 111 كم فإن قوس خط الزوال البالغ 500 كم يحتوي على $\frac{500}{48} \approx 10.4°$. ثم طارت الهليكوبتر إلى الجنوب، أي على خط الزوال ج د، وبعد أن قطعت 500 كم، كان يجب أن تكون مرة أخرى على خط عرض لينينجراد. والآن الطريق يقع إلى الغرب، أي على أ د؛ 500 كم من هذا الطريق، من المحتم أنها أقصر من المسافة أ د. في المسافة أ د يقع عدد من الدرجات مساوٍ لما يقع في ب ج، أي $10.4°$. ولكن طول $1°$ على خط العرض $60°$ يساوي تقريباً 55.5كم. وبالتالي فإن المسافة ما بين أ و د تساوي $55.5 \times 10.4 \approx 577$ كم. نرى من ذلك أن الهليكوبتر لم تستطع الهبوط في لينينجراد، فهي لم تقطع مسافة 77 كم اللازمة لكي يصل إلى لينينجراد، أي أنها وصلت فوق بحيرة لادوجسكوية وما كانت تستطيع الهبوط سوى على الماء.

8– الذين تحدثوا حول هذه المسألة ارتكبوا عدة أخطاء. فمن الخطأ القول إن أشعة الشمس الساقطة على الكرة الأرضية تتفرق بشكل ملحوظ. الأرض صغيرة جداً إذا ما قورنت بالمسافة ما بينها

وبين الشمس، بحيث يمكن اعتبار أن أشعة الشمس الساقطة على جزء ما من سطحها تتفرق بزاوية لا يمكن حسابها وبالتالي يمكن عملياً اعتبار أن هذه الأشعة متوازية. وما نراه في بعض الأحيان (ما يسمى «الانتشار من خلف السحب») من انتشار أشعة الشمس كمروحة اليد، ليست سوى نتيجة المنظور.

ففي المنظور تبدو الخطوط المتوازية كأنها متقابلة، ولتتذكروا منظر القضبان الذاهبة إلى بعد أو منظر الممر المشجر الطويل.

ولكن، نظراً لأن أشعة الشمس تسقط على الأرض بحزم متوازية، فلا ينجم من ذلك بتاتاً أن الظل الكامل للهليكوبتر يساوي نفس الهليكوبتر في العرض. وبالنظر إلى شكل 4 ستفهمون أن الظل الكامل للهليكوبتر في الفضاء يتضاءل في اتجاه الأرض، بالتالي، فإن الظل الذي يكونه على سطح الأرض، يجب أن يكون أضيق من نفس الهليكوبتر: ج د أصغر من أ ب.



شكل 4

لو عرفنا الهليكوبتر فيمكن حساب مقدار ضخامة هذا الفرق. لنفرض أن الهليكوبتر تطير على ارتفاع 100 م فوق سطح الأرض. فالزاوية المصنوعة بالمستقيمين أ ج، ب د بينهما، تساوي الزاوية التي ترى بها الشمس من الأرض. وهذه الزاوية معروفة وهي: حوالي $\frac{1}{2}$°. من جهة أخرى، من المعلوم أن أي جسم مرئي بزاوية $\frac{1}{2}$° يبعد عن العين بـ 115 مرة من عرضه. وهذا يعني أن جزء المستقيم م ن (هذا المستقيم يرى من سطح الأرض بزاوية $\frac{1}{2}$°) يجب أن يكون الجزء الـ $\frac{1}{115}$ من أ ج. وقيم أ ج أكبر من المسافة المائلة من أ حتى سطح الأرض. لو كانت الزاوية ما بين اتجاه أشعة الشمس وسطح الأرض تساوي 45° فإن أ ج (عند ارتفاع الهيلوكبتر بمقدار 100م) يكون ما يقرب من 140م، وبالتالي، يكون جزء المستقيم م ن يساوي $\frac{140}{115} \approx 1.2$م.

ولكن زيادة عرض الهليكوبتر على عرض الظل، أي أن جزء المستقيم م ب أكبر من م ن، وبالذات أكبر منه بـ 1.4 مرة، نظراً لأن الزاوية م ب د تقريباً تساوي بدقة 45°. وبالتالي م ب يساوي 1.2×1.4، وهذا يعطي 1.7 م تقريباً.

إن كل ما قلناه ينسب إلى الظل الكامل للهليكوبتر - الظل الأسود والقوي، وليس له علاقة بما يسمى بشبه الظل، الضعيف والمهوش.

ويبين حسابنا، بالمناسبة بأنه لو كان في مكان الهليكوبتر كرة غير كبيرة ذات قطر أقل من 1.7م، فإنها لم تكن لتصنع ظلاً أبداً ولكان قد ظهر شبه ظلها المهوش فقط.

9- تحل هذه المسألة من النهاية. سنبدأ بالقول إنه بعد كل الانتقالات أصبح عدد أعواد الكبريت في الأكوام متساوياً. وبما أنه لم يتغير نتيجة لهذه الانتقالات العدد الكلي لأعواد الكبريت وظل كما هو كان سابقاً (48)، فإذن أصبح في كل كومة في نهاية كل الانتقالات 16 عوداً وهكذا يكون لدينا في النهاية.

الكومة الأولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
16	16	16

وقبل ذلك مباشرة أضيف إلى الكومة الأولى عدد أعواد مساوٍ لما كان فيه قبل ذلك، وبقول آخر قد **تضاعف** عدد الأعواد فيها. وهذا يعني أنه قبل الانتقال الأخير كان في الكومة الأولى ليس 16 عوداً ولكن 8 أعواد فقط. أما في الكومة الثالثة التي أخذت منها 8 أعواد فكان فيها قبل ذلك 16 + 8 = 24 عوداً.

والآن يكون لدينا توزيع الأعواد على الأكوام كالآتي:

الكومة الأولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
8	16	24

ثم نحن نعرف أنه قبل ذلك نقل من الكومة الثانية إلى الكومة الثالثة عدد من الأعواد، مثل الذي كان في الكومة الثالثة. أي 24 عوداً وهو **ضعف** عدد الأعواد التي كانت قبل ذلك في الكومة الثالثة. من هنا نعرف توزيع الأعواد بعد الانتقال الأول.

الكومة الأولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
8	28 = 12 + 16	12

من السهل أن نعرف أنه قبل الانتقال الأول (أي قبل أن ينقل من الكومة الأولى إلى الكومة الثانية عدد من الأعواد مساوٍ لما في هذه الكومة الثانية) - كان توزيع الأعواد كالآتي:

الكومة الأولى	الكومة الثانية	الكومة الثالثة
22	14	12

هذه هي أعداد أعواد الكبريت الأولية في الأكوام.

10- من الأسهل حل هذا اللغز من النهاية أيضاً. نحن نعرف أنه بعد المضاعفة **الثالثة** أصبح في المحفظة روبلاً واحداً و20 كوبيكاً (هذه النقود أخذها العجوز في آخر مرة). كم إذن من النقود كان قبل هذه المضاعفة؟ بالطبع 60 كوبيكاً بعد أن دفع للعجوز روبلاً واحداً و20 كوبيكاً الثانية. وقبل الدفع كان في المحفظة روبل واحد و20 كوبيكاً + 60 كوبيكاً = روبل واحد و80 كوبيكاً.

ثم إن الروبل الواحد و80 كوبيكاً كانت في المحفظة بعد **المضاعفة الثانية**. قبل ذلك كان كل الموجود 90 كوبيكاً. وهو الباقي بعد أن دفع للعجوز روبلاً واحداً و20 كوبيكاً. من هنا نعرف أنه كان يوجد في المحفظة قبل أن يدفع للعجوز 90 كوبيكاً + روبل واحد و20 كوبيكاً = روبلان و10 كوبيكات. وكانت هذه النقود في المحفظة بعد **أول مضاعفة**، وقبل ذلك كان هنا أقل منها بمرتين أي روبل واحد و5 كوبيكات. هذه هي النقود التي بدأ بها القروي عملياته الاقتصادية الفاشلة.

فلنتحقق من النتيجة.

بعد أول مضاعفة... روبل واحد (ر) و5 كوبيكات (ك) × 2 =
0.2 و10 ك

بعد أول دفع... 0.2 و10 ك – 0.1 و20 ك = 90 ك

بعد ثاني مضاعفة... 90 ك × 2 = 0.1 و80 ك

بعد ثاني دفع... 0.1 و80 ك – 0.1 و20 ك = 60 ك

بعد ثالث مضاعفة... 60 ك × 2 = 0.1 و20 ك

بعد ثالث دفع... 0.1 و20ك – 0.1 و20ك = صفر

11- يعود تقويمنا إلى أيام الرومان القدماء. إذ كان الرومان (قبل يوليوس قيصر)، يعتبرون بداية السنة ليس أول يناير وإنما أول مارس. إذن كان ديسمبر عندئذ الشهر **العاشر**. وعند نقل بداية السنة إلى أول يناير لم تتغير أسماء الأشهر. ومن هنا ظهر عدم التطابق ما بين الاسم والرقم بالترتيب، الذي يوجد الآن لعدد من الشهور.

اسم الشهر	معنى التسمية	الرقم بالترتيب
سبتمبر	السابع	9
أكتوبر	الثامن	10
نوفمبر	التاسع	11
ديسمبر	العاشر	12

12- فلنتتبع ما الذي صنع بالعدد المختار. قبل كل شيء كتب بجانبه العدد الثلاثي الذي اختير مرة أخرى. هذا هو نفس الشيء لو كتبنا بجانب العدد المختار ثلاثة أصفار ثم أضفنا إلى العدد المتكون العدد الأول، فمثلاً:

$$872 + 872000 = 872872$$

والآن اتضح ما الذي تم عمله مع العدد المختار، وهو أننا ضاعفناه بمقدار 1000 مرة، وبالإضافة إلى ذلك أضفنا إليه نفس العدد، وباختصار، ضربنا العدد الأصلي في 1001.

ما الذي فعلناه بعد عملية الضرب هذه؟ قسمناه بعد ذلك على التوالي على 7 ثم على 11 ثم على 13، ومعناه في نهاية المطاف أننا قسمناه على $7 \times 11 \times 13$ أي على 1001.

وهكذا ضربنا العدد المختار أولاً في 1001 ثم قسمناه على 1001. هل عندئذ يلزم التعجب إذا كانت النتيجة هي نفس العدد المختار؟

وقبل أن ننهي باب الألغاز في بيت الراحة، سأتحدث عن ثلاث حيل حسابية تستطيعون بها أن تشغلوا وقت فراغ رفاقكم. وتتكون اثنتان من تلك الحيل في تحزير الأعداد، والحيلة الثالثة في تحزير أصحاب الأشياء.

إنها حيل قديمة وقد تكون معروفة لديكم ولكن قد لا يعرف الجميع على أي أساس وُضِعت هذه الحيل. ولا يمكن تنفيذها بوعي وإدراك بدون معرفة الأسس النظرية للحيلة. ويتطلب إثبات

الحيلتين الأوليتين القيام برحلة متواضعة وغير متعبة تماماً في مجال مبادئ الجبر.

13- الرقم المحذوف. دع رفيقك يختار أي عدد كثير الأرقام وعلى سبيل المثال 847. ودعه يوجِد مجموع أرقام هذا العدد (8 + 4 + 7) = 19، وأن يطرح المجموع من العدد المختار، سيكون العدد:

828 = 19 − 847

دعه يشطب رقماً واحداً من العدد الذي حصل عليه وليس من المهم أي رقم منها ويقول لكم ما تبقى. اذكروا له في الحال الرقم الذي شطب على الرغم من أنكم لا تعرفون العدد الذي اختاره ولم تروا ماذا صنع به.

كيف تستطيعون القيام بذلك وفيمَ يكمن حل الحيلة؟

يتم ذلك بكل بساطة: يبحث عن [illegible] الذي يكون مع المجموع الذي قيل لكم أقرب عدد يقسم على 9 بدون باقٍ. إذا كان مثلاً قد حُذِف من العدد 828 الرقم الأول (8) وذكرت لكم الأرقام 2 و8 فإنه بجمع 2 + 8 يمكننا معرفة أنه إلى أقرب عدد يقسم على 9، أي إلى العدد 18 يلزم العدد 8. وهذا هو الرقم المحذوف.

لم يحدث ذلك؟ لأنه إذا طرحنا من أي عدد مجموع أرقامه، فيجب أن يبقى العدد الذي يقسم على 9، وبتعبير آخر، يتبقى ذلك العدد الذي يقسم مجموع أرقامه على 9. وفعلاً فلنفرض أنه في العدد المختار يكون الرقم أ للمئات و ب رقم العشرات و ج رقم الآحاد. هذا يعني أن في هذا العدد توجد الآحاد الآتية:

100 أ + 10 ب + ج

فنطرح من هذا العدد مجموع أرقام أ + ب + ج. ونحصل على 100 أ + 10 ب + ج - (أ + ب + ج) = 99 أ + 9 ب = 9 (11 أ + ب) ولكن 9 (11 أ + ب)، بالطبع يقسم على 9. وهذا يعني أنه عندما يطرح مجموع أرقامه فدائماً لا بد وأن نحصل على عدد يقسم على 9 بدون باقٍ.

عند تنفيذ الحيلة قد يحدث أن يكون مجموع الأرقام المذكورة لك قابلة نفسها للقسمة على 9 (مثلاً 4 و5). فهذا يدل على أن الرقم المحذوف هو إما صفر أو 9. وهكذا يجب أن تجيب: صفر أو 9.

وإليكم الآن نفس الحيلة ولكنها في شكل مختلف: بدلاً من أن يطرح من العدد المختار مجموع أرقامه، يمكن طرح الرقم الناتج من هذا العدد بواسطة تغيير وضع أرقامه. مثلاً من العدد 8247 يمكن طرح 2748 (إذا ما حصلنا على عدد أكبر من المختار فيطرح الأصغر من الأكبر). ثم يتم عمل نفس الشيء الذي تحدثنا عنه قبل ذلك 8247 - 2748 = 5499. لو شطب الرقم 4، فبمعرفة الأرقام 5، 9، 9 لا بد وأن تعرف أن أقرب الأعداد لـ 5 + 9 + 9 أي 23، الذي يقسم على 9 هو 27. وهذا يعني أن الرقم المحذوف هو 27 - 23 = 4.

14- أن تحزر العدد بدون السؤال عن أي شيء. لتقترح على رفيقك أن يختار أي عدد ثلاثي لا ينتهي بصفر (شرط أن لا يقل الفرق ما بين الرقمين الأول والأخير عن 2)، واطلب بعد ذلك منه أن يضع الأرقام في نظام عكسي. بعمل ذلك يجب عليه أن يطرح

العدد الأصغر من الأكبر ويتم جمع الفرق المحصول عليه معه، ولكن يكتب في تسلسل عكسي للأرقام. وبدون أن تسأل أي شيء من رفيقك يمكن أن تقول له العدد الذي نتج لديه في النهاية.

إذا كان قد اختير مثلاً العدد 467، فإن رفيقك لا بد وأن يقوم بالعمليات التالية:

$$467 \text{ ، } 754 \text{ ، } \begin{array}{r} 764 \\ -\,467 \\ \hline 297 \end{array} + \begin{array}{r} 297 \\ +\,792 \\ \hline 1089 \end{array}$$

وتقوم بإبلاغه هذه النتيجة النهائية – 1089 فكيف يمكن أن تعرفها؟

لنبحث المسألة في شكلها العام. ولنأخذ العدد المؤلف من الأرقام أ ، ب ، ج، بحيث أن أ أكبر من ج على أقل تقدير باثنين. هذا العدد يكتب عندئذ كالآتي:

100 أ + 10 ب + ج

العدد ذو الوضع العكسي للأرقام يحمل الشكل الآتي:

100 ج + 10 ب + أ

الفرق بين الأول والثاني يساوي:

99 أ – 99 ج

نقوم بالتحويل الآتي:

99 أ – 99 ج = 99 (أ – ج) = 100 (أ – ج) – (أ – ج) = 100 × (أ – ج) – 100 + 100 – 10 + 10 – أ + ج = 100 (أ – ج – 1) + 90 + (10 – أ + ج)

وهذا يعني أن الفرق يتكون من الأرقام الثلاثة الآتية:

رقم المئات: أ – ج – 1

رقم العشرات: 9

رقم الآحاد: 10 + ج – أ

والعدد ذو الوضع العكسي للأرقام يكتب كالآتي:

100 (10 + ج – أ) + 90 + (أ – ج – 1)

بجمع الصيغتين:

100 (أ – ج – 1) + 90 + 10 + ج – أ

+

100 (10 + ج – أ) + 90 + أ – ج – 1

نحصل على

100 × 9 + 180 + 9 = 1089

وهكذا فبغض النظر عن الأرقام المختارة أ، ب، ج سنحصل دائماً على عدد واحد هو 1089. ومن السهل لذلك معرفة نتيجة هذه الحسابات: إذ إنك تعرفها مسبقاً.

من المفهوم، أنه لا ينبغي عرض هذه الحيلة على شخص واحد مرتين لأن السر سيُكتشَف.

15- من أخذ؟ وماذا؟ لتنفيذ هذه الحيلة الذكية يلزم تحضير أي ثلاثة أشياء صغيرة يمكن وضعها بسهولة في الجيب، مثلاً: أقلام

رصاص، مفتاح، مطواة. بالإضافة إلى ذلك ضع على المنضدة طبقاً فيه 24 بندقة، إذا لم يكن هناك بندق فيمكن وضع 24 من حجارة الطاولة أو الدومينو أو أعواد الكبريت... وما شابه ذلك.

واطلب من ثلاثة من الرفاق أن يخفوا في جيوبهم، في الوقت الذي ستختبئ فيه - القلم، فالمفتاح أو السكين... كلٌّ يأخذ ما يريد. وعليك أنت أن تحزر أي الأشياء توجد في جيب أي منهم.

عملية التحزير تتم كالآتي: برجوعك إلى الحجرة بعد أن خبأ الرفاق الأشياء في جيوبهم تبدأ من أن تعطيهم بعض البندق من الطبق ليحفظوه لديهم. تعطي الأول بندقة واحدة، والثاني: بندقتين، والثلاث: ثلاث بندقات. ثم تخرج مرة أخرى من الحجرة وتترك للرفاق أن يقوموا بالآتي: يجب على كل منهم أن يأخذ من الطبق بندق كالآتي: من معه القلم يأخذ مثل ما أعطى من بندق، ومن معه المفتاح يأخذ أكثر بمرتين مما أعطى، ومن معه السكين يأخذ أكثر بأربع مرات مما أعطى.

أما البندقات الأخرى فتبقى في الطبق.

عندما ينجز هذا كله وأُعطيت لك الإشارة للعودة، انظر لدى دخولك الحجرة إلى الطبق وقول أي الأشياء في جيب أي منهم.

الحيلة تكون محيرة أكثر إذا كانت تتم بعدم وجود من يخبرك سراً بإشارات غير ملحوظة. وليس في هذه الحيلة أي خدعة. إذ

تعتمد بكاملها على الحساب. أنت تبحث عمن أخذ الشيء بواسطة عدد البندقات الباقية في الطبق فقط. يبقى في الطبق عدد غير كبير من البندقات من 1 حتى 7 ويمكن عدّها بنظرة واحدة. ولكن كيف يمكن مع ذلك بمعرفة ما تبقى من بندقات، من الذي أخذ أي الأشياء؟

ببساطة جداً: لكل حالة من توزيع الأشياء ما بين الرفاق يوجد عدد مختلف من البندقات الباقية في الطبق. وسنتأكد من ذلك الآن.

لنفرض أن أسماء رفاقك الذين أعطيتهم بندقة وبندقيتين، وثلاث بندقات هي على التوالي:

فلاديمير وجيورجي وكونستانتين. سنرمز لهم بأول حرف من الاسم ف، ج، ك. وسنرمز للأشياء أيضاً بالحروف: قلم: أ، مفتاح: ب، سكين: ج. كيف يمكن أن تتوزع ثلاثة أشياء بين ثلاثة أشخاص؟ بستة طرق:

ف	ج	ك
أ	ب	ج
أ	ج	ب
ب	أ	ج
ب	ج	أ
ج	أ	ب
ج	ب	أ

من الواضح أنه لا توجد أي حالات أخرى، ففي الجدول تبين كل التركيبات الممكنة.

فلننظر الآن أي البواقي يقابل كل واحد من هذه الحالات:

ف ج ك	عدد البندقات المأخوذة	المجموع	الباقي
أ ب ج	1 + 1 = 2، 2 + 4 = 6، 3 + 12 = 15	23	1
أ ج ب	1 + 1 = 2، 2 + 8 = 10، 3 + 6 = 9	21	3
ب أ ج	1 + 2 = 3، 2 + 2 = 4، 3 + 12 = 15	22	2
ب ج أ	1 + 2 = 3، 2 + 8 = 10، 3 + 3 = 6	19	5
ج أ ب	1 + 4 = 5، 2 + 2 = 4، 3 + 6 = 9	18	6
ج ب أ	1 + 4 + 5، 2 + 4 = 6، 3 + 3 = 6	17	7

أنت ترى أن الباقي من البندقات في كل حالة مختلف. ولذلك فبمعرفة الباقي يمكن بسهولة تحديد توزيع الأشياء ما بين الرفاق. وأنت مرة أخرى -للمرة الثالثة- تخرج من الحجرة وتنظر هناك في مذكرتك حيث كُتِب الجدول السابق (المطلوب فقط هو العمود الأول والأخير) ولا داعي لأن تتذكرها غيباً فهي عملية صعبة. وسيبين لك الجدول أي الأشياء في جيب من. لو تبقت على الطبق 5 بندقات فإن هذا يعني (الحالة ب ج أ) أن:

المفتاح: مع فلاديمير

السكين: مع جيورجي

القلم: مع كونستانتين

لكي تنجح الحيلة لا بد وأن تتذكر جيداً كم عدد البندقات التي أعطيتها لكل واحد من الرفاق (أعط البندقات لذلك دائماً تبعاً للأبجدية كما فعلنا في مثالنا هذا).

2

الرياضيات في الألعاب

الدومينو

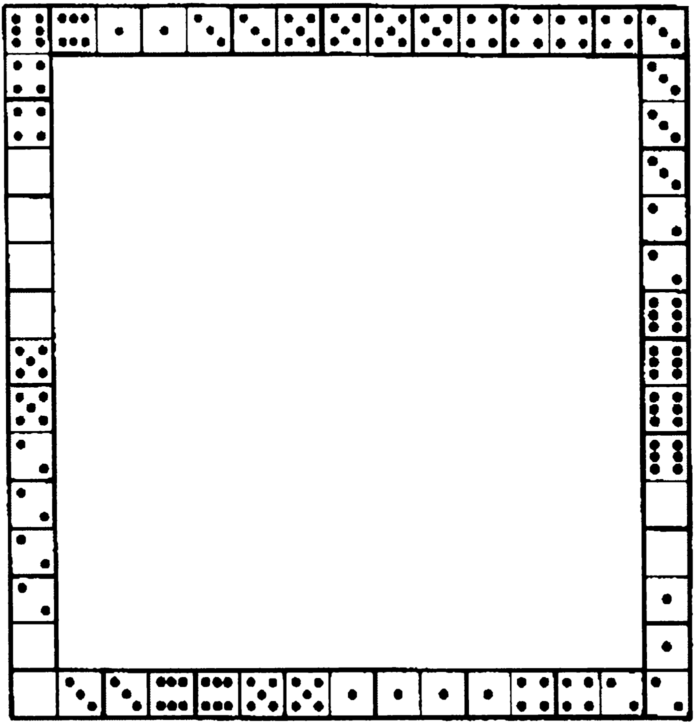
16- سلسلة من 28 قطعة دومينو. لم يمكن وضع 28 قطعة دومينو مع مراعاة قواعد اللعبة في سلسلة مستمرة واحدة؟

17- بداية السلسلة ونهايتها. عندما وضعت 28 قطعة دومينو في سلسلة، كانت على إحدى نهايتيها 5 نقط.

كم من النقط يوجد على النهاية الأخرى؟

18- حيلة بواسطة الدومينو. يأخذ رفيقك إحدى قطع الدومينو ويقترح عليك أن تصنع من الـ 28 قطعة الأخرى سلسلة مستمرة، ويؤكد أن ذلك يمكن دائماً مهما كانت القطعة المأخوذة. ويخرج هو إلى الحجرة المجاورة لكي لا يرى السلسلة التي ستصنعها أنت.

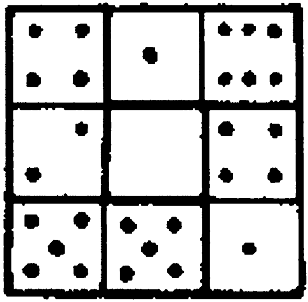
وستبدأ أنت العمل وتتأكد من أن رفيقك كان صادقاً: 27 قطعة دومينو وضعت في سلسلة واحدة. والأكثر عجباً أن رفيقك وهو موجود في الحجرة المجاورة ودون أن يرى السلسلة التي صنعتها يقول لك من هناك ما هو عدد النقط على نهايتي السلسلة.



شكل 5

وكيف يمكنه معرفة ذلك؟ ولماذا كان هو متأكداً من أن الـ 27 قطعة دومينو تشكل سلسلة مستمرة؟

19- الإطار. الشكل 5 يمثل إطاراً مربعاً مصنوعاً من قطع الدومينو مع المحافظة على قواعد اللعبة. وأضلاع الإطار متساوية في الطول، ولكنها غير متساوية بمجموع عدد النقط، إذ إن الصفين الأسفل والأيمن يحتويان على 44 نقطة أما الصفين الآخرين فيحتويان على 59 و32.



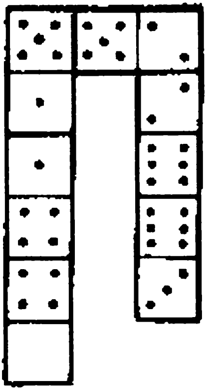
شكل 6

هل تستطيع أن تصنع مثل هذا الإطار ولكن بشرط أن يكون مجموع نقط كل الصفوف متساوياً ويبلغ 44؟

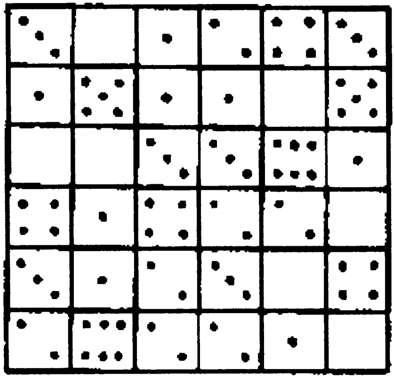
20- سبعة مربعات. يمكن اختيار أربع قطع دومينو بحيث يتكون منها مربع فيها عدد متساوٍ من النقط على كل ضلع (يمكن أن ترى على الشكل 6 نموذجاً لذلك، وبجمع النقط على كل ضلع من أضلاع المربع تجد أنه في جميع الحالات مساوٍ لـ 11).

هل تستطيع أن تصنع من كل قطع الدومينو في نفس الوقت سبعة مربعات مماثلة له؟ لا يطلب أن يكون مجموع النقط على كل ضلع واحداً في جميع المربعات، يلزم فقط أن يكون عدد النقط في كل ضلع من أضلاعه الأربعة واحداً.

21- مربعات سحرية من قطع الدومينو. مبين على الشكل 7 مربع يتألف من 18 قطعة دومينو يتميز بأن مجموع نقط أي صف، طولي أو عرضي أو قطري من صفوفه، يكون واحداً هو: 13. ومثل هذه المربعات تسمى منذ القدم «بالسحرية».



شكل 8



شكل 7

المطلوب تكوين مثل هذه المربعات السحرية المكونة من 18 قطعة دومينو، ولكن بمجموع آخر للنقط في الصف. و13 هو أصغر مجموع في صفوف المربع السحري المتكون من 18 قطعة، وأكبر مجموع هو 23.

22- متوالية من الدومينو. ترى على الشكل 8 ست قطع دومينو وضعت تبعاً لقواعد اللعبة وتختلف من حيث أن عدد النقط على القطع (على نصفي كل قطعة) يكبر بمقدار 1. ويبدأ الصف من 4 ويتكون من الأعداد الآتية للنقط:

4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9

مثل هذا الصف من الأعداد التي تتزايد (أو تتناقص) بمقدار ثابت يسمى بـ «المتوالية الحسابية». في الصف الذي لدينا يكون كل عدد أكبر من سابقه بـ 1. ولكن في المتوالية يمكن أن يكون أي «فرق» آخر.

وتنحصر المسألة في وجوب تكوين عدة متواليات من ست قطع دومينو.

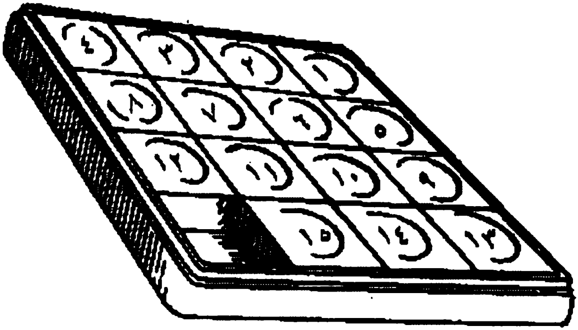
اللعبة في الـ 15 أو «تاكن»

إن تاريخ العلبة المعروفة ذات الـ 15 مربعاً المرقمة تاريخ طريف، قليل من يعرفه ممن يلعبون هذه اللعبة. سنورد هذا التاريخ كما رواه باحث الألعاب الألماني الرياضي ف. آرينس.

منذ حوالي نصف قرن مضى، في أواخر السبعينيات، ظهرت في الولايات المتحدة الأمريكية «اللعبة في 15». وقد انتشرت بسرعة ونظراً لأن عدد اللاعبين لا بد وأن يكون فردياً فقد تحولت إلى فاجعة اجتماعية حقاً.

ونفس الشيء لوحظ أيضاً على الجانب الآخر من المحيط في أوروبا. لقد كان من الممكن هنا رؤية المسافرين في عربات الترام وفي أيديهم العلب ذات الـ 15 قطعة. وضج أصحاب المحلات والمؤسسات من ولع عُمّالهم بهذه اللعبة، واضطروا إلى منعهم من اللعب في وقت العمل والتجارة. وقد استغل أصحاب مؤسسات اللهو هذه اللعبة ونظموا مسابقات كبيرة فيها.

ولقد زحفت اللعبة حتى إلى صالات الاحتفالات للرايخستاج الألماني. ويتذكر الجغرافي والرياضي المعروف زيجموند جيونتر الذي كان نائباً في زمن زحف وباء هذه اللعبة قائلاً: «أتذكر حتى هذه اللحظة الرجال الشيوخ في الرايخستاج وقد ركزوا كل اهتمامهم في النظر إلى العلبة المربعة التي في أيديهم».



شكل 9. اللعبة في الـ 15

وكتب أحد المؤلفين الفرنسيين: «ولقد وجدت هذه اللعبة في باريس مكاناً تحت السماء المكشوفة، وفي المنتزهات وانتشرت بسرعة من العاصمة إلى الأقاليم. «ولم يكن هناك من بيت ريفي منعزل لم يعشش فيه هذا العنكبوت متحفزاً للفريسة التي ستقع في حبائله».

في عام 1880 وصلت حمى اللعبة، كما يبدو، إلى ذروتها. ولكن بعد ذلك وبسرعة انتصر سلاح الرياضيات على هذا الوحش. لقد وجدت النظرية الرياضية للعبة أنه من المسائل المختلفة التي يمكن أن تقترح يمكن حل نصفها فقط أما النصف الآخر فلا يمكن بأي حال حله».

«وغدا واضحاً لماذا لم تحل بعض المسائل على الرغم من الجهد العنيد، ولماذا خصص منظمو المسابقات جوائز ضخمة لمن يحل المسائل. وفاق الجميع من هذه الناحية مخترع اللعبة نفسه الذي عرض على ناشر جريدة في نيويورك أن يقدم لملحق يوم الأحد

مسألة غير محلولة مع جائزة 1000 دولار لمن يحلها، وبما أن الناشر تردد فقد أعرب المخترع عن استعداده التام لأن يدفع مبلغ الـ 1000 دولار من جيبه الخاص. واسم المخترع ساموبل (سام) لويد. ولقد اكتسب شهرة واسعة كواضع للمسائل المسلية ومجموعة كبيرة من الألغاز. ومن الطريف أنه لم يستطع الحصول في أمريكا على براءة اختراع اللعبة التي ألفها. وتبعاً للنظام كان يجب عليه أن يقدم «نموذجاً عاملاً» لإجراء التجارب عليه، قد اقترح على موظف مكتب براءة الاختراعات مسألة، وعندما سأل الأخير هل هي تحل أم لا، كان يجب على المخترع أن يقول «لا، إن حلها رياضياً غير ممكن». «في هذه الحالة -يتبع الاعتراض- لا يمكن أن يكون هذا النموذج عاملاً وبدون نموذج لا يمكن إعطاء براءة الاختراع». ولقد اكتفى لويد بهذه النتيجة. ولكن ربما كان قد اتخذ موقفاً أكثر إلحاحاً لو تنبأ بالنجاح الساحق لاختراعه»(*).

ونورد أدناه ما رواه مخترع اللعبة نفسه عن بعض الحقائق عن تاريخها:

«يذكر ساكنو مملكة الألغاز القدماء -يكتب لويد- كيف أنني أجبرت كل العالم في بداية السبعينيات أن يشغل فكره بعلبة ذات مربعات متحركة عرفت باسم «اللعبة في الـ 15» (شكل 10). خمس عشر قطعة كانت موضوعة في علبة مربعة في نظام صحيح وفقط المربعين 14 و15 كان موضوع كل منهما مكان الآخر كما هو

(*) استخدم مارك توين هذا المشهد في روايته «المدعي الأمريكي».

مبين على الشكل المرفق (شكل 11). وتركزت المسألة في أنه بتحريك القطع على التوالي نوصلها إلى الوضع العادي، بحيث يصحح وضع القطعتين 14 و15.

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٥	١٤	١٣

شكل 10

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٤	١٥	١٣

شكل 11

شكل 12. «... عن الموظفين المحترمين الذين يقضون ليالي مستمرة واقفين تحت مصابيح الإضاءة...»

ولم يحصل على الجائزة ذات الـ 1000 دولار المقترحة لقاء أول حل صحيح لهذه المسألة أي أحد، على الرغم أن الجميع عكفوا على حل هذه المسألة بلا كلل. وتروي أقاصيص مضحكة عن التجار الذين نسوا فتح محلاتهم من جراء هذا، وأقاصيص عن الموظفين المحترمين الذين كانوا يقضون ليالي مستمرة تحت مصابيح الشارع ليجدوا الطريق إلى الحل. لم يرغب أحد في أن يعدل عن البحث عن الحل حيث إن الجميع كانوا يشعرون بثقة في النجاح المنتظر. ويقولون إن الملاحين أوقعوا سفنهم في الأماكن الضحلة من جراء هذه اللعبة، وأن سائقي القطارات لم يتوقفوا في المحطات، وأن أصحاب المزارع أهملوا محاريثهم».

* * *

سنعرف القارئ ببداية نظرية هذه اللعبة. هي في شكلها الكامل معقدة جداً وتقترب كثيراً من أحد أقسام الجبر العالي (نظرية المحددات). وسنقتصر فقط على بعض المفاهيم التي صاغها ف. أرينس.

مسألة اللعبة تتركز عادة في أنه بواسطة التحريك المتوالي الممكن بوجود مكان خالٍ، تنقل أي وضع ابتدائي للـ 15 قطعة إلى وضعها الطبيعي أي إلى ذلك الوضع الذي تكون عنده كل القطع مرتبة حسب أرقامها: في الزاوية العليا اليمنى 1، إلى اليسار 2، ثم 3، وفي الزاوية العليا اليسرى 4، ثم في الصف الثاني من اليمنى إلى اليسار 5، 6، 7، 8 وهكذا. وهذا الوضع النهائي العادي مبين على شكل 10.

فلنتخيل الآن الوضع عندما تكون الـ 15 قطعة موضوعة بدون نظام. يمكن دائماً بإجراء عدة نقلات وضع القطعة 1 في مكانها الذي تحتله على الرسم.

وبنفس الشكل تماماً يمكن دون المساس بالقطعة 1 أن نضع القطعة 2 في المكان المجاور إلى اليسار. ثم، بدون المساس بالقطعتين 1 و2 يمكن وضع القطعتين 3 و4 في مكانهما الطبيعي، لو أنهما بالصدفة لم يكونا في الصفين الرأسيين الأخيرين، فإنه من السهل توصيلهما لهذه المنطقة. ثم بواسطة عدة نقلات يمكن الوصول إلى النتيجة المرجوة. والآن الصف الأعلى 1، 2، 3، 4 يتمتع بنظام ولن نمس هذا الصف في العمليات التالية لتحريم القطع. بمثل هذه الطريقة نجتهد لأن نوصل الصف الثاني إلى النظام 5، 6، 7، 8. ومن السهل التأكد أنه يمكن الوصول إلى ذلك دائماً. ثم في محيط الصفين الأخيرين يلزم أن نضع القطعتين 9 و13 في وضعهما الصحيح، وهذا أيضاً ممكن دائماً. من كل القطع التي وضعت في مكانها السليم 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 و13 لا يجب تحريك ولا واحدة منها ويتبقى جزء مكون من ستة مربعات أحدها خالٍ أما الخمسة الباقية فمشغولة بالقطع 10، 11، 12، 14، 15 في نظام حر. في حدود هذا الجزء سداسي المكان، يمكن دائماً أن نضع القطع 10، 11، 12 في مكانها الصحيح. عندما نعمل ذلك نجد أنه في الصف الأخير تكون القطعتان 14، 15 موضوعتين أما في نظامهما الطبيعي أو العكسي (شكل 11). وبهذه الطريقة التي يمكن للقراء أن يراجعوها عملياً نصل إلى النتيجة الآتية.

يمكن توصيل أي وضع ابتدائي إما إلى وضع شكل 10 (وضع I) أو شكل 11 (وضع II).

إذا كان يمكن توصيل أحد الأوضاع، وللاختصار سنرمز له بالحرف س، إلى الوضع I فمن الواضح أن العكس صحيح أي أن

نتقل الوضع I إلى الوضع س. إذ إن كل تحركات القطع عكسية: فلو أن، على سبيل المثال، في الدائرة I نستطيع أن نضع القطعة 12 في المكان الخالي، فيمكن لهذه الخطوة في نفس الوقت أن تتم في الاتجاه العكسي بحركات عكسية في الاتجاه.

وهكذا، تكون لدينا مجموعتان من الأوضاع، بحيث إن أوضاع المجموعة الأولى يمكن أن تنقل إلى الوضع العادي I، أما المجموعة الثانية فإلى الوضع II. وبالعكس يمكن الحصول من الوضع العادي على أي وضع في المجموعة الأولى، ومن الوضع II أي وضع من المجموعة الثانية. وأخيراً، أي وضعين تابعين لمجموعة واحدة يمكن أن يحولا كل إلى الآخر.

ألا يمكن أن نسير قدماً ونوحد هذين الوضعين I و II ؟ يمكن بدقة إثبات (دعنا لا ندخل في التفصيلات) أن هذه الأوضاع لا تتحول واحدة إلى أخرى بأي عدد من النقلات. ولذلك فكل العدد الضخم لأوضاع القطع ينتهي إلى مجموعتين:

(1) إلى تلك التي يمكن تحويلها إلى الوضع الطبيعي I، وهذه الأوضاع محلولة.

(2) إلى تلك التي يمكن أن تحول إلى الوضع II وهي بالتالي لا يمكن تحويلها مهما كان الحال إلى الوضع العادي: وهذه الأوضاع هي التي وضعت لحلها جوائز مالية ضخمة.

كيف تعرف هل ينتمي هذا الوضع إلى المجموعة الأولى أو الثانية؟ سيوضح المثال ذلك.

لنبحث الوضع التالي:

أول صف من القطع منتظم، والثاني أيضاً عدا القطعة الأخيرة (9). وهذه القطعة تحتل المكان، الذي تحتله في الوضع العادي القطعة 8. ويعني ذلك أن القطعة 9 تقف قبل القطعة 8: مثل هذا السبق في النظام العادي يسمى «عدم نظام». وعن القطعة 9 سنقول: يوجد هنا عدم نظام 1. بالنظر إلى باقي القطع، نلاحظ «سبق» بالنسبة للقطعة 14، هي موضوعة على ثلاثة أماكن (القطع 12، 13، 11) قبل وضعها العادي ويوجد لدينا هنا 3 عدم نظام (14 قبل 12، 14 قبل 13، 14 قبل 11). ولقد عددنا إلى الآن 1 + 3 = 4 عدم نظام. ثم القطعة 12 موضوعة قبل القطعة 11 وكذلك أيضاً القطعة 13 قبل القطعة 11. هذا يعطي أيضاً 2 عدم نظام. والمجموع يكون 6 عدم نظام. بمثل هذه الطريقة يحدد العدد الكلي لعدم النظام لأي وضع على أن يخلي المربع الأخير في الزاوية اليسرى السفلى مسبقاً. إذا كان عدد عدم النظام كما هو في الحالة التي نتكلم عنها زوجياً، فإن الوضع المعطى يمكن أن يوصل إلى وضع نهائي عادي، وبكلمات أخرى فإن هذا الوضع ينسب إلى الأوضاع المحلولة. أما إذا كان عدد عدم النظام فردياً فإن الوضع ينسب إلى المجموعة الثانية، أي للأوضاع غير المحلولة (صفر عدم نظام يعتبر عدد زوجي من عدم النظام). «نظراً للوضوح الذي أدخل إلى هذه اللعبة بواسطة الرياضيات، لم يعد هناك مكان لحمى الشغف بهذه اللعبة. لقد وضعت الرياضيات نظرية كاملة لهذه اللعبة. نظرية لم تترك ولا نقطة واحدة - تدعو للشك. وتتوقف نتيجة اللعبة ليس على الصدف ولا الموهبة، كما هو الحال في الألعاب الأخرى ولكن على العوامل الرياضية التي تحددها بثقة تامة». فلنتوجه الآن إلى الألغاز في هذا المجال. ها هي عدة مسائل ممكنة الحل والتي وضعها مخترع اللعبة.

٣	٢	١	
٧	٦	٥	٤
١١	١٠	٩	٨
١٥	١٤	١٣	١٢

شكل 13

١	٥	٩	١٣
٢	٦	١٠	١٤
٣	٧	١١	١٥
٤	٨	١٢	

شكل 14

23- أول مسألة للويد. من الوضع المبين على الشكل 11، حول القطع إلى وضعها الصحيح ولكن بمكان خالٍ في الزاوية العليا إلى اليمين (شكل 13).

24- ثاني مسألة للويد. من الوضع المبين على الشكل 11 أدر العلبة ربع دورة وحرّك القطع إلى أن تأخذ الوضع المبين على الشكل 14.

25- **ثالث مسألة للويد.** بتحريك القطع تبعاً لقوانين اللعبة من الوضع على شكل 11، حول العلبة إلى «مربع سحري»، وهذا يعني أن تضع القطع بحيث يكون مجموع الأعداد في كل الاتجاهات مساوياً 30.

لعبة الكروكيت

بدراسة الألغاز التي تنسب إلى الدومينو ولعبة الـ 15 كنا ضمن حدود الحساب. ولكننا بالانتقال إلى الألغاز على ملعب الكروكيت ندخل جزئياً إلى ميدان الهندسة.

اقترح على لاعبي الكروكيت المسائل الخمس الآتية:

26- المرور خلال المرمى أو إجراء كروكيت (اصطدام كرتين)؟ إن المرمى الكروكيتي مستطيل الشكل. ويبلغ عرضه ضعف قطر الكرة. في مثل هذه الظروف ما هو الأسهل: هل المرور، بحرية وبدون الاصطدام بالسلك من أحسن وضع في المرمى أم الاصطدام بالكرة من مثل تلك المسافة (يحدث اصطدام الكرتين)؟

27- الكرة والعمود. يبلغ سمك عمود الكروكيت من الأسفل 6 سم، وقطر الكرة 10 سم. كم مرة أسهل أن تصطدم بالكرة من أن تصطدم من نفس المسافة بالإسفين (تطعن نفسها)؟

28- المرور من المرمى أو الطعن؟ الكرة أضيق بمرتين من المرمى المستطيل الشكل وأعرض بمرتين من العمود القائم. ما الأسهل: أن تمر بحرية من المرمى من أحسن وضع أو أن تطعن من نفس هذه المسافة؟

29- المرور خلال المصيدة أم إجراء اصطدام بين الكرتين؟ عرض المرمى المستطيل الشكل أكبر بثلاث مرات من قطر الكرة. ما هو الأسهل: أن تمر بحرية من أحسن وضع عبر المصيدة أم يتم من نفس المسافة اصطدام الكرة بالكرة؟

30- المصيدة المسدودة الطرف. بأية نسبة ما بين عرض المرمى المستطيل وقطر الكرة يصبح المرور خلال المصيدة أمراً مستحيلاً؟

حل الألغاز 16-30 :

16- لتسهيل المسألة سنضع جانباً مؤقتاً كل القطع الثنائية السبع: صفر-صفر، 1-1، 2-2...إلخ. فتبقى إذن 21 قطعة يتكرر

عليه كل عدد من النقط 6 مرات. مثلاً الـ 4 نقط (في مجال واحد) توجد على القطع الست الآتية:

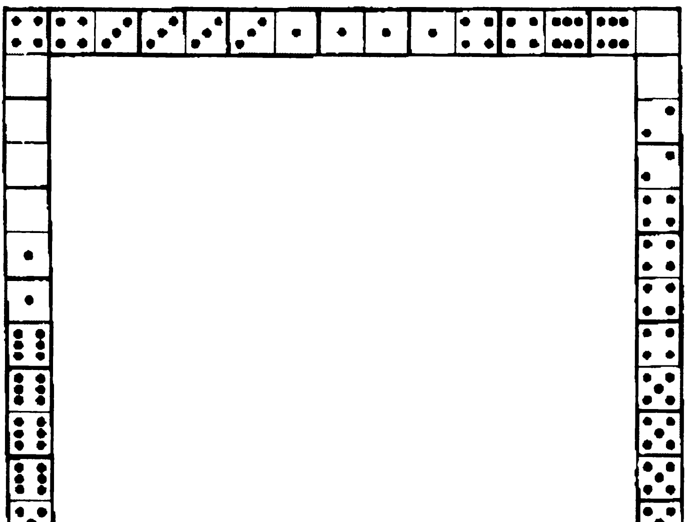
4 – صفر، 4–1، 4–2، 4–3، 4–5، 4–6 وهكذا، يتكرر نفس عد النقط كما نرى في عدد زوجي من المرات. ومن الواضح أنه يمكن وضع القطع من هذه المجموعة الواحدة إلى الأخرى بأعداد متساوية من النقط إلى أن ننتهي من المجموعة كلها. وعندما يتم ذلك وحينما تكون الـ 21 قطعة قد وضعت في سلسلة مستمرة، عندئذ ندخل عند الوصلات صفر – صفر، 1–1، 2–2...إلخ الـ 7 ثنائيات التي وضعناها جانباً. بعد هذا يتضح أن جميع الـ 28 قطعة دومينو تكون موضوعة في سلسلة واحدة مع مراعاة قواعد اللعبة.

17– من السهل أن نبين أن السلسلة المكونة من 28 قطعة دومينو، يجب أن تنتهي بنفس عدد النقط التي بدأت بها. وفعلاً: لو لم يكن كذلك، لتكرر عدد النقط الواقعة على نهايات السلسلة بعدد فردي من المرات (لكن في داخل السلسلة تكون أعداد النقط واقعة بشكل الأزواج) ولكننا نعلم أنه في المجموعة الكاملة لقطع الدومينو يتكرر كل عدد من النقط 8 مرات، أي عدد زوجي من المرات. وبالتالي فإن الافتراض والذي افترضناه الذي ينص على أن عدد النقط على نهايات السلسلة غير متساو – يكون غير صحيح: يجب أن يكون عدد النقط واحداً (يدعى مثل هذا الأسلوب في التفكير، كما هو الحال في الرياضيات، بـ«الإثبات من العكس»).

وبالمناسبة تنتج من خاصية السلسلة التي أثبتناها تواً النتيجة الطريفة الآتية: يمكن دائماً إغلاق السلسلة المكونة من 28 قطعة

بنهايتيها والحصول على حلقة. إذن فإن المجموعة الكاملة لقطع الدومينو يمكن أن تكون بالتالي مرتبة مع مراعاة قواعد اللعبة ليس فقط في سلسلة ذات نهايتين حرتين ولكن أيضاً في حلقة مقفلة.

وقد يتساءل القارئ كم هو عدد الطرق المختلفة التي تنفذ بها هذه السلسلة أو الحلقة؟ فنقول دون الدخول في تفاصيل حسابات مرهقة هنا أن عدد الطرق المختلفة لتكوين السلسلة (أو الحلقة) المؤلفة من 28 قطعة دومينو كبير جداً: أكثر من 7 تريليون. والعدد الدقيق هو:



شكل 15

7959229931520

(هذا العدد يمثل حاصل ضرب الحدود الآتية $2^{13} \times 3^{8} \times 5 \times 7 \times 4231$).

18- ينبع حل هذا اللغز مما قيل تواً. نحن نعرف 28 قطعة دومينو، يمكن وضعها دائماً في حلقة مقفلة، وبالتالي، وإذا رفعنا من هذه الحلقة قطعة واحدة فإن:

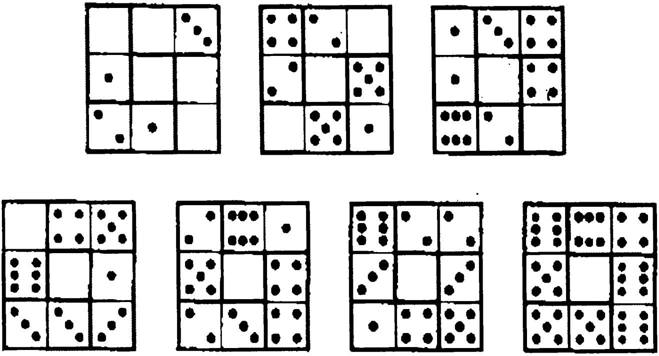
1) القطع الـ 27 المتبقية تكون سلسلة مستمرة ذات أطراف مفتوحة.

2) عدد النقط على نهايات هذه السلسلة ستكون تلك التي توجد على القطعة المأخوذة.

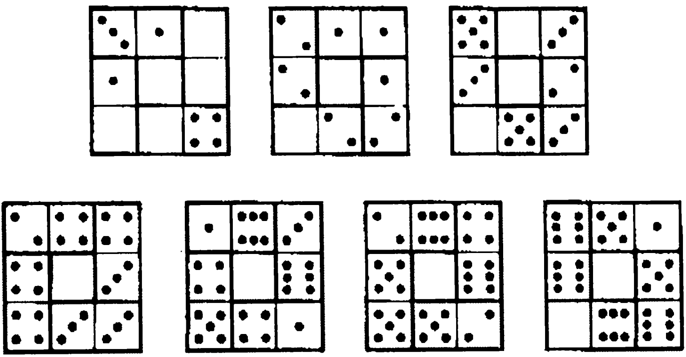
وكذلك فبإخفاء قطعة دومينو نستطيع أن نذكر مقدماً أي عدد من النقط سيكون على نهايتي الدائرة المكونة من القطع المتبقية.

19- أن مجموع نقط كل جوانب المربع المطلوب لا بد وأن تساوي $44 \times 4 = 176$، أي بمقدار 8 أكبر من مجموع النقط الموجودة على مجموعة قطع الدومينو بكاملها (168). ويحدث هذا، بالطبع، من أن أعداد النقط التي تحتل رؤوس المربع تحسب مرتين. ويتحدد مما قلناه كيف يجب أن يكون مجموع النقط على رؤوس المربع: 8. هذا يسهل بعض الشيء البحث عن الوضع المطلوب على الرغم من أن إيجاده صعب جداً. والحل مبين على الشكل 15.

20- سنورد حلين من الحلول الكثيرة الممكنة لهذه المسألة. في الحل الأول (شكل 16) لدينا:



شكل 16



شكل 17

مربع واحد بمجموع 4 ، مربعان بمجموع 9

مربع واحد بمجموع 6 ، مربع واحد بمجموع 10

مربع واحد بمجموع 8 ، مربع واحد بمجموع 16

في الحل الثاني (شكل 17)

مربعان بمجموع 4 ، مربعان بمجموع 10

مربع واحد بمجموع 8 ، مربعان بمجموع 12

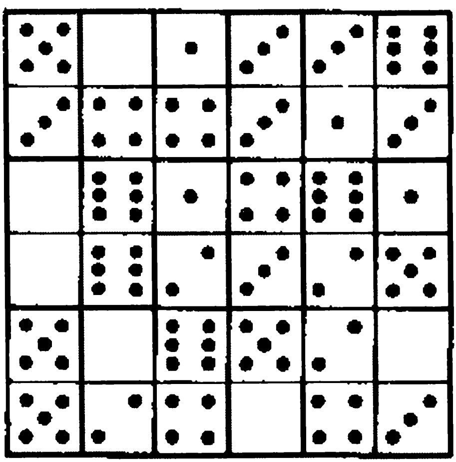
21- مبين على الشكل 18 نموذج للمربع السحري ذي مجموع النقط في الصف 18.

22- إليك على سبيل المثال متواليتين يبلغ الفرق بينهما 2:

أ) صفر - صفر ، صفر - 2، صفر-4، صفر-6، 4-4 (أو 3-5)، 5-5 (أو 4-6).

ب) صفر-1 ، صفر-3 (أو 1-2) ، صفر-5 (أو 2-3) ، 1-6 (أو 3-4) ، 3-6 (أو 4-5) ، 5-6.

وكل المتواليات سداسية القطع يمكن وضع 23 حلاً لها. والقطع الابتدائية لها هي:



شكل 18

أ) للمتوالية ذات الفرق 1 :

صفر-صفر	1-1	1-2	2-2	2-3
صفر-1	2-صفر	3-صفر	1-3	4-2
1-صفر	صفر-3	صفر-4	4-1	5-3
صفر-2	2-1	3-1	3-2	4-3

ب) للمتوالية ذات الفرق 2:

صفر-صفر ، صفر-2 ، صفر-1

23- يمكن أن نحصل على وضع المسألة من الوضع الابتدائي بواسطة الـ 44 حركة التالية:

14 ، 11 ، 12 ، 8 ، 7 ، 6 ، 10 ، 12 ، 8 ، 7،

4 ، 3 ، 6 ، 4 ، 7 ، 14 ، 11 ، 15 ، 13 ، 9 ،

12 ، 8 ، 4 ، 10 ، 8 ، 4 ، 14 ، 11 ، 15 ، 13 ،

9 ، 12 ، 4 ، 8 ، 5 ، 4 ، 8 ، 9 ، 13 ، 14 ،

10 ، 6 ، 2 ، 1 .

24- يمكن الوصول إلى وضع المسألة بواسطة الـ 39 حركة الآتية:

14 ، 15 ، 10 ، 6 ، 7 ، 11 ، 15 ، 10 ، 13 ، 9

5 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 8 ، 12 ، 15 ، 10 ، 13 ،

9 ، 5 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 8 ، 12 ، 15 ، 14 ،

13 ، 9 ، 5 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 8 ، 12

25- يمكن الحصول على المربع السحري ذي المجموع 30 بعد عدة حركات هي:

12 ، 8 ، 4 ، 3 ، 2 ، 6 ، 10 ، 9 ، 13 ، 15 ،
14 ، 12 ، 8 ، 4 ، 7 ، 10 ، 9 ، 14 ، 12 ، 8 ،
4 ، 7 ، 10 ، 9 ، 6 ، 2 ، 3 ، 10 ، 9 ، 6 ،
5 ، 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 5 ، 3 ، 2 ، 1 ، 13 ،
14 ، 3 ، 2 ، 1 ، 13 ، 14 ، 3 ، 12 ، 15 ، 3

26- ربما يقول حتى اللاعب المجرب إنه في الأحوال المذكورة يكون من الأسهل المرور خلال المرمى أسهل من عمل كروكيت. فالمرمى أعرض بمرتين من الكرة. ولكن هذا التصور خاطئ: فالمرمى -طبعاً- أوسع من الكرة ولكن الممر الحر للكرة خلال المرمى أضيق بمرتين من الهدف اللازم لإجراء الكروكيت.

انظر إلى الشكل 19 وسيصبح ما قلناه، واضحاً لك. لا يجب أن يقترب مركز الكرة إلى سلك المرمى بمسافة أقل من قيمة نصف القطر وإلا لاصطدمت الكرة بالسلك. وإذن يتبقى لمركز الكرة هدف أقل من عرض المرمى بمقدار نصفي قطر. ومن السهل رؤية أنه في ظروف مسألتنا يكون عرض الهدف عند المرور خلال المرمى في أحسن وضع مساوياً لقطر الكرة.

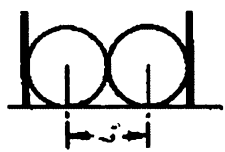
لننظر الآن كم هو كبير عرض الهدف بالنسبة لمركز الكرة المتحركة عند إجراء الكروكيت. من الواضح أنه إذا كان مركز الكرة التي تصادم يقترب من مركز الكرة التي تصطدم بها بأقل من نصف قطر الكرة فإن الصدمة محققة. ومعناه أن عرض الهدف في هذه الحالة، كما هو واضح من الشكل 20، يساوي قطري الكرة.

وهكذا فعلى الرغم من رأي اللاعبين، ففي الأحوال المعطية يكون أسهل بمرتين أن تصطدم بالكرة ناهيك عن المرور الحر خلال المرمى من أحسن وضع.

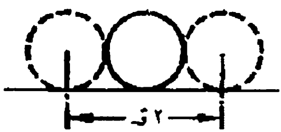
27- بعد كل ما قيل الآن لا تتطلب هذه المسألة شرحاً طويلاً. من السهل رؤية (شكل 21) أن عرض الهدف عند الاصطدام يساوي ضعف قطر الكرة، أي 20 سم، أما عرض الهدف عند التسديد إلى العمود فيساوي مجموع قطر الكرة والعمود، أي 16 سم (شكل 22). هذا يعني أن إجراء الاصطدام أسهل من الطعن الذاتي:

$$20 \div 16 = 1\frac{1}{4}$$ مرة

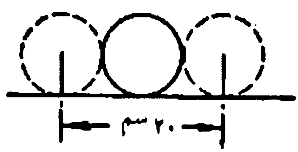
بمقدار 25٪ فقط. ويلجأ اللاعبون عادة إلى زيادة فرص إجراء الاصطدام بالمقارنة مع إصابة العمود.



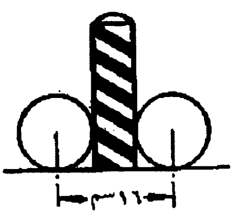
شكل 19



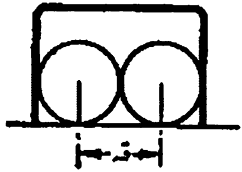
شكل 20



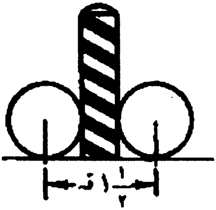
شكل 21



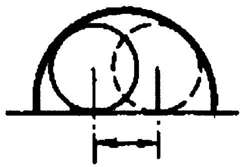
شكل 22



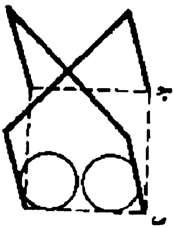
شكل 23



شكل 24

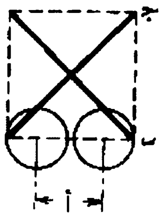


شكل 25



شكل ٢٦

شكل 26



شكل 27

28- وقد يفكر لاعب آخر كالآتي: بما أن المرمى أعرض بمرتين من الكرة، والعمود أضيق بمرتين من الكرة فإنه يجب لغرض المرور الحر خلال المرمى أن يكون الهدف أعرض بأربع مرات منه في حالة إصابة العمود. ولن يرتكب قارئنا الذي تعلم من المسائل السابقة مثل هذا الخطأ. فسيعرف أنه للتنشين على العمود

يكون الهدف أعرض بمقدار $1\frac{1}{2}$ مرة منه عند المرور عبر المرمى من أحسن وضع. هذا واضح من النظر إلى الشكلين 23 و24.

(إذا لم يكن المرمى مستطيل الشكل وإنما منحنياً بشكل قوس فإن ممر الكرة يكون أضيق أيضاً - كما هو سهل تصوره من النظر إلى الشكل 25).

29- يظهر من الشكلين 26 و27 أن الجزء أ المتبقي لمرور مركز ضيق بما فيه الكفاية عند الأحوال المذكورة في المسألة. والذين يعرفون الهندسة يعرفون أن الجانب أ ب للمربع أصغر من قطره أ ج بـ 1.4 مرة تقريباً.

لو كان عرض المرمى 3 ن (حيث ن - قطر الكرة) فإن أ ب يساوي:

3 ن ÷ 1.4 ≈ 2.1 ن

يكون الجزء أ الذي يعتبر هدفاً لمركز الكرة التي تمر خلال المصيدة من أحسن وضع أضيق. وهو أقل بقطر كامل، أي يساوي:

2.1 ن - ن = 1.1 ن

ولكن الهدف لمركز الكرة الصادمة يساوي، كما نعلم، 2 ن. وبالتالي فالاصطدام يكون أسهل بمرتين تقريباً في الأحوال المذكورة، من المرور خلال المصيدة.

30- لا تسمح المصيدة بالمرور تماماً في تلك الحالة، عندما يزيد عرض المرمى على عرض قطر الكرة بأقل من 1.4 مرة. وينبع هذا من التوضيح المعطى في المسألة السابقة. وإذا كان المرمى على شكل قوس، تزداد أحوال المرور عندئذ سوءاً.

3

دستة ألغاز أخرى

31- الحبل(*). حبل آخر؟ سألت الأم وهي تخرج يديها من حوض الغسل. - ممكن التفكير كما لو كنت أنا كلي مصنوعة من الحبال. تسمع دائماً حبل ثم حبل آخر. ألم أعطك أمس لفة كبيرة من الحبال. لِمَ كل هذه الحبال؟ ماذا عملت بها؟

فأجاب الولد: ماذا عملت بها؟ أولاً، لقد استرجعت نصفها مني ثانية...

- وبماذا تأمر أن ألف رزم الغسيل؟

- بينما أخذ توم نصف ما تبقى لكي يصطاد السمك في القناة.

- يجب دائماً أن تتنازل لأخيك الأكبر.

- وأنا تنازلت. لقد بقي القليل جداً، فمن الباقي أخذ بابا النصف لإصلاح الحمالات التي انقطعت عنده بسبب الضحك عندما حدث حادث للسيارة. وبعد ذلك لزم أختي أخذ خمس الباقي لكي تربط شعرها بشكل عقدة...

(*) هذا اللغز ينسب إلى الكاتب القصصي الإنكليزي باري بين.

- وماذا صنعت بالباقي من الحبل؟

- بالباقي؟ الذي تبقى بعد ذلك كان 30 سم فقط، فهل يمكن عمل هاتف من هذا الجزء الصغير.

فما هو الطول الأولي للحبل؟

32- الجوارب والقفازات. وضعت في صندوق واحد 10 أزواج من الجوارب البنية اللون و10 أزواج سوداء، وفي صندوق آخر وضعت 10 أزواج من القفزات البنية، وعشرة أزواج سوداء. كم من الجوارب والقفازات يكفي أخذه من كل صندوق لكي يمكن منها اختيار زوج واحد (أي زوج) من الجوارب وزوج من القفازات؟

33- طول عمر الشعرة. كم هو في المتوسط عدد الشعرات على رأس الإنسان؟ لقد حسبت: حوالي 150000[*]. وحدد أيضاً كم شعرة في المتوسط تسقط في الشهر: 3000 شعرة تقريباً.

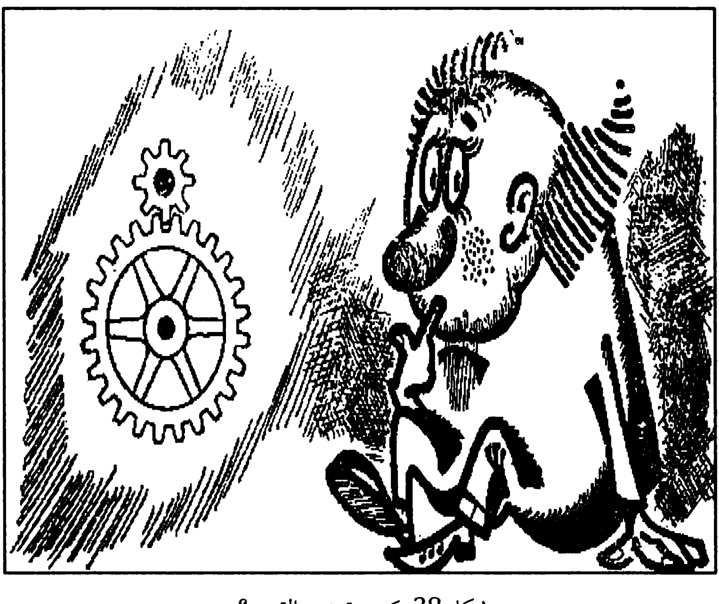
كيف يمكن بهذه المعطيات، حساب زمن -في المتوسط طبعاً- بقاء كل شعرة على الرأس؟

(*) يتعجب الكثيرون كيف أمكن معرفة ذلك: هل بتعداد كل الشعرات على الرأس؟ لا، لِمَ ذلك، عدوا فقط كم من الشعر يوجد على 1سم^2 من سطح الرأس. وبمعرفة ذلك وسطح الجلد المغطى بالشعر، من السهل تحديد العدد الكلي للشعرات على الرأس. باختصار، إن علماء التشريح قد عدوا الشعرات بنفس الطريقة التي يستخدمها العاملون في الغابات لعد الأشجار في الغابة.

34- المرتب. إن مرتبي عن الشهر الماضي، مضافة إليه أجور عمل الساعات الإضافية، يساوي 130 روبلاً. علماً بأن المرتب الأصلي أكبر بـ 100 روبل من أجور عمل الساعات الإضافية. ما هو مرتبي بدون أجور عمل الساعات الإضافية؟

35- التزحلق على الزحافات. حسب رياضي التزحلق على الجليد أنه إذا قطع 10 كم في الساعة فإنه سيصل إلى المكان المعين سلفاً متأخراً ساعة واحدة عن وقت الظهر، وإذا ما تزحلق بسرعة 15 كم في الساعة لوصل إلى المكان بساعة قبل الظهر.

بأي سرعة يجب أن يتزحلق لكي يصل إلى المكان المعين في منتصف النهار بالضبط؟



شكل 28. كم مرة يدور الترس؟

36- عاملان. اثنان من العمال أحدهما عجوز والآخر شاب يسكنان في شقة واحدة ويعملان في مصنع واحد. يقطع الشاب المسافة من المنزل حتى المصنع في 20 دقيقة، أما العجوز فيقطعها في 30 دقيقة. بعد كم دقيقة يلحق الشاب بالعجوز إذا كان الأخير قد خرج من المنزل قبل الشاب بـ 5 دقائق.

37- إعادة استنساخ التقرير. كلفت عاملتا آلة كاتبة بإعادة استنساخ التقرير. والأكثر خبرة منهما تستطيع أن تنفذ كل العمل في ساعتين والأقل خبرة في ثلاث ساعات.

في أي زمن ستعيدا استنساخ التقرير إذا قسمنا العمل بينهن بغية تنفيذه في أقل وقت؟

عادة تحل المسائل من هذا النوع بنموذج المسألة المشهورة عن حمامات السباحة. وبالذات: ففي مسألتنا يحدد، كم من العمل الكلي تنفذه كلا عاملتي الآلة الكاتبة في الساعة، ثم يجمع الكسران ويقسم واحد صحيح على هذا المجموع. ألا تستطيع أنت أن تبتكر طريقة جديدة لحل مثل هذه المسائل تختلف عن المعمول بها؟

38- العجلتان المسننتان؟ ترس ذو 8 أسنان جرى تعشيقه مع عجلة ذات 24 سناً (شكل 28). وعند دوران العجلة الكبيرة يمر الترس حولها تماماً.

المطلوب معرفته، كم مرة سيدور الترس حول محوره خلال الزمن الذي يصنع فيه دورة كاملة حول العجلة المسننة الكبيرة؟

39- كم عمره؟ سأل أحد محبي الألغاز، كم عمره؟ فأجاب بالآتي:

- خذ ثلاثة أضعاف عدد سنوات عمري بعد ثلاث سنوات، واطرح منها ثلاثة أضعاف عدد سنوات عمري قبل ثلاث سنوات فسيبقى لديك عدد سنوات عمرِي بالضبط.

فكم عمره الآن؟

40- عائلة إيفانوف. كم عمر إيفانوف؟

- فلنفكر. كان منذ ثمان عشرة سنة مضت أكبر بثلاثة أضعاف من ابنه. أنا أذكر ذلك جيداً لأن في ذلك العام تم تعداد النفوس العام.

- اسمح لي رجاء، فاعتماداً على ما أعرف، أنه الآن أكبر من ابنه بمرتين. هل هذا ابن آخر؟

- لا، نفس الابن، إن لديه ابناً واحداً فقط. ولذلك فليس من الصعب أن نحدد كم عمر إيفانوف الآن وكم عمر ابنه.

كم عمره أيها القارئ؟

41- تحضير المحلول. يوجد في قنينة شيء من حامض الكلوريد وفي قنينة أخرى نفس الكمية من الماء. ولتحضير المحلول جرى أولاً أخذ 20جم من الحامض من القنينة الأولى وضعت في القنينة الثانية. ثم أعيد سكب ثلثي المحلول، الحاصل في القنينة الثانية، في الأولى. بعد ذلك اتضح أنه يوجد في القنينة الأولى سائل أكثر بأربع مرات من الموجود في الثانية. كم هي كمية الحامض والماء المأخوذة في البداية؟

42- المشتريات. عندما خرجت لشراء بعض الحاجيات كان في محفظتي 15 روبلاً تقريباً تتألف من روبلات منفردة وقطع معدنية

ذات فئة 20 كوبيكاً. وعندما عدت جلبت معي عدداً من الروبلات المنفردة بقدر ذلك العدد الذي كان معي من القطع النقدية ذات فئة 20 كوبيكاً في البداية، ومن القطع النقدية ذات فئة 20 كوبيكاً مثل ما كان معي أولاً من الروبلات المنفردة. مع العلم أنه بقيت في محفظتي ثلث الكمية التي أخذتها معي عند خروجي لشراء الحاجيات.

فما هو ثمن المشتريات؟

حل الألغاز 31-42:

31- بعد أن أخذت الأم النصف بقي $\frac{1}{2}$، وبعد أن أخذ الأخ الأكبر تبقى $\frac{1}{4}$. وبعد الأب $\frac{1}{8}$ وبعد الأخت $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$. فإذا كان 30 سم يساوي من الطول الابتدائي يكون طول الحبل الأصلي $30 \div \frac{3}{40} = 400$ سم أو 4 م.

32- يكفي أخذ ثلاثة جوارب حيث إن اثنين منها سيكونان دائماً من لون واحد. والأمر ليس بهذه السهولة بالنسبة للقفازات التي يختلف كل عن الآخر ليس فقط باللون ولكن نصف القفازات إلى يمين والنصف الآخر إلى يسار. وهنا يكفي 21 قفازاً. ولو أننا حصلنا على كمية أقل، ولتكن مثلاً 20، فإنه قد يحدث أن كل الـ 20 تكون على يد واحدة (10 قفازات بنية اللون من اليسار و10 سواء من اليسار).

33- إن آخر شعرة ستسقط، بالطبع، هي تلك التي تكون اليوم أصغر من الكل في العمر، أي التي عمرها يوماً واحداً.

فلننظر بعد كم من الزمن سيحين الوقت لتسقط. في أول شهر من هذه الـ 150000 شعرة التي توجد الآن على الرأس ستسقط 3 آلاف وفي الشهرين الأولين 6 آلاف وخلال السنة الأولى 12 مرة في 3 آلاف، أي 36 ألف. ستمر، بالتالي، أربع سنوات وأكثر بقليل قبل أن يأتي الدور لأن تقع آخر شعرة. بهذه الطريقة يتحدد لدينا العمر المتوسط لشعرة الإنسان: 4 سنوات وأكثر بقليل.

34- يجيب الكثيرون، بدون تفكير، 100 روبل. هذا غير صحيح: إذ إنه في هذه الحالة سيكون المرتب الأصلي أكبر من الساعات الإضافية بـ 70 روبلاً فقط وليس بـ 100.

يجب حل المسألة كالآتي. نحن نعلم، أنه إذا أضفنا إلى ثمن أجور عمل الساعات الإضافية 100 روبل فإننا سنحصل على المرتب الأصلي. ولذلك فإذا ما أضفنا إلى 130 روبلاً 100 روبل أخرى فإنه يجب أن نحصل على مرتبين أصليين. ولكن $130 + 100 = 230$. يعني أن المرتب الأصلي المضاعف يكون 230 روبلاً. من هنا ينجم أن المرتب الواحد بدون أجور عمل الساعات الإضافية يساوي 115 روبلاً أما قيمة أجرة عمل الساعات الإضافية فتكون المتبقي من 130 روبلاً أي 15 روبلاً.

فلنراجع: إن المرتب 115 روبلاً هو أكبر من ثمن الساعات الإضافية، أي الـ 15 روبلاً بـ 155 روبل، كما ورد في شروط المسألة.

35- إن هذه المسألة طريفة من ناحيتين: أولاً فمن السهل أن تدخل فكرة أن السرعة المطلوبة هي المتوسط ما بين 10 كم و15 كم في الساعة، أي تساوي $12\frac{1}{2}$كم في الساعة. ومن السهل التأكد من

أن مثل هذا الحل غير صحيح. ففعلاً لو أن طول المسافة المقطوعة أ من الكيلومترات فعند التزحلق بسرعة 15 كيلومتراً سيمكث المتزحلق على الطريق $\frac{أ}{15}$ من الساعات، وعندما تكون السرعة 12.5 كم سيمكث $\frac{أ}{12.5}$ أو $\frac{2أ}{25}$. ولكن عندئذ يجب أن تتحقق المتساوية:

$$\frac{2أ}{25} - \frac{أ}{15} = \frac{أ}{10} - \frac{2أ}{25}$$

لأن كلًّا من هذين الفرقين يساوي ساعة واحدة. وباختصار أ نحصل على:

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25}$$

أو في صورة أخرى:

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

وهذه المتساوية غير صحيحة:

$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ أي $\frac{4}{24}$ وليس $\frac{4}{25}$

والخاصية الثانية للمسألة هي أنها يمكن أن تحصل ليس فقط بدون مساعدة المعادلات ولكن حتى ببساطة بحساب شفوي.

لنتصور الآتي: إذا ما أمضى المتزحلق عندما تكون سرعته 15 كم في الساعة فترة في الطريق تزيد بمدة ساعتين (أي مثل الوقت اللازم عند سرعة 10 كم في الساعة)، فإنه يقطع مسافة تزيد بـ 30

كم على ما قطعه في الحقيقة. ونحن نعلم أنه في ساعة واحدة يقطع 5 كم أكثر، وهذا يعني أنه لمكث في الطريق $\frac{30}{5} = 6$ ساعات. من هنا يتحدد طول المسافة المقطوعة عندما تكون السرعة 15 كم في الساعة: $6 - 2 = 4$ ساعات. وبالإضافة لذلك تتضح المسافة المقطوعة : $15 \times 4 = 60$ كم.

والآن من السهل إيجاد بأي سرعة يجب أن يتزحلق لكي يصل إلى المكان في منتصف النهار بالضبط أو بتعبير آخر لكي يقطع المسافة خلال 5 ساعات:

$$\frac{60}{5} = 12 \text{ كم/ ساعة}$$

والآن من السهل التأكد بواسطة التجربة أن هذه الإجابة صحيحة.

36- يمكن حل المسألة دون اللجوء إلى معادلة وبطرق مختلفة.

ها هي الطريقة الأولى. العامل الشاب يقطع في 5 دقائق $\frac{1}{4}$ الطريق، والعجوز $\frac{1}{6}$ الطريق، أي أقل من الشاب بمقدار:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

وبما أن العجوز قد سبق الشاب بمقدار $\frac{1}{6}$ الطريق، إذن فسيبلغه الشاب بعد:

$$\frac{1}{6} \div \frac{1}{12} = 2$$

بفترة خمس دقائق أو بالأحرى بعد 10 دقائق.

الطريقة الثانية أسهل: لقطع كل الطريق يحتاج العامل العجوز إلى 10 دقائق أكثر من الشاب. لو أن العجوز خرج قبل الشاب بـ 10 دقائق لوصل الاثنان إلى المصنع في نفس الوقت. ولو أن العجوز خرج قبله بـ 5 دقائق فقط فإن الشاب لا بد وأن يلحقه في منتصف الطريق أي بعد مرور 10 دقائق (يقطع العامل الشاب كل الطريق في 20 دقيقة).

ويمكن حل المسألة بطرق حسابية أخرى.

37- إن الحل غير المعتاد للمسألة كالآتي: قبل كل شيء لنطرح السؤال التالي: كيف يجب على عاملتي الآلة الكاتبة أن تقتسما العمل بينهن لإنهائه في نفس الوقت؟ (من الواضح أن عند هذا الشرط فقط، أي بدون توقف، سينفذ العمل في أقرب وقت). ونظراً لأن عاملة الآلة الكاتبة الأكثر تجربة تستنسخ بمرة ونصف أسرع من العاملة الأقل تجربة، فواضح أن الأولى يجب أن تأخذ عملاً يزيد بـ $1\frac{1}{2}$ مرة عما تأخذه الثانية. وعندئذ ستنهي الاثنتان العمل في نفس الوقت. من هنا ينجم أن الأولى يجب أن تستنسخ $\frac{3}{5}$ التقرير أما الثانية فـ $\frac{2}{5}$ التقرير.

والمسألة بهذه الطريقة تصبح محلولة تقريباً. يتبقى فقط إيجاد الوقت اللازم لكي تنفذ عاملة الآلة الكاتبة الأولى $\frac{3}{5}$ العمل. ونحن نعرف أنها تستطيع تنفيذ كل العمل في غضون ساعتين، وهذا يعني أن $\frac{3}{5}$ العمل ستنفذه في $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ ساعة. في نفس هذا الزمن يجب أن تنفذ عاملة الآلة الكاتبة الثانية جزء العمل المخصص لها.

وهكذا فإن أقصر وقت يمكن خلاله استنساخ التقرير بواسطة عاملتي الآلة الكاتبة هو ساعة واحدة و12 دقيقة.

كما ويمكن اقتراح حل آخر. فخلال 6 ساعات كانت عاملة الآلة الكاتبة الأولى تستطيع أن تعيد كتابة التقرير ثلاث مرات، أما العاملة الثانية فخلال نفس الوقت تستطيع إعادة كتابة التقرير مرتين. هذا يعني أنهما تستطيعان سوياً خلال 6 ساعات إعادة استنساخ التقرير 5 مرات (أي لاستطاعتا خلال 6 ساعات استنساخ عدد من الصفحات أكبر مما يوجد في التقرير). ولكن عندئذ يلزمهما لإعادة استنساخ التقرير وقتاً أقل بخمس مرات من 6 ساعات أي أنه يلزمهما $\frac{6}{5}$ = ساعة واحدة و12 دقيقة.

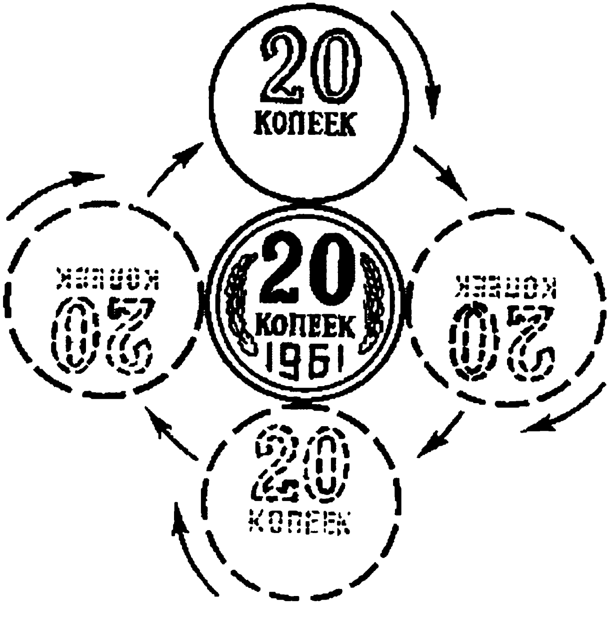
38- إذا ما ظننت أن الترس سيدور ثلاث مرات فأنت مخطئ، فسيدور الترس أربع دورات لا ثلاث.

لكي توضح لنفسك بجلاء فيم الفكرة هنا ضع أمامك على ورقة ناعمة قطعتين من النقود، مثلاً قطعتين من فئة 20 كوبيكاً كما هو مبين على الشكل 29. امسك قطعة النقود السفلى ثم مرر على محيطها قطعة النقود العليا. ستلاحظ شيئاً غير متوقع. فعندما تقطع قطعة النقود نصف محيط القطعة السفلى وتصبح في الأسفل ستكون قد دارت دورة كاملة حول محورها، ويلاحظ هذا من وضع الأرقام على قطعة النقود. وبمرورها على قطعة النقود غير المتحركة تلحق قطعة النقود أن تدور دورتين حول القطعة غير المتحركة.

وعموماً عندما يتحرك جسم في دائرة فهو يصنع دورة أكثر مما يمكن أن نعتبر مباشرة. لنفس السبب فإن كرتنا الأرضية بدورانها

حول الشمس تدور حول محورها لا 365 مرة وربع، ولكن 366 مرة وربع لو عددنا الدورات لا بالنسبة للشمس ولكن بالنسبة للنجوم. وأنت الآن تفهم لماذا يكون اليوم النجمي أقصر من الشمسي.

39- الحل الحسابي معقد جداً، ولكن المسألة تحل ببساطة إذا ما استخدمنا إمكانيات الجبر وكوّنا معادلة. سنرمز لعدد السنين الذي نبحث عنه بالحرف س. أما العمر بعد ثلاث سنوات فلا بد وأن نرمز له بـ س + 3، أما العمر قبل ثلاث سنوات مضت فسنرمز له بـ س – 3. لدينا المعادلة:



شكل 29. قطعة نقدية يمكن أن تعمل بدورانها حول قطعة نقدية أخرى دورتين وليس دورة واحدة.

3 (س + 3) – 3 (س – 3) = س

وبحل هذه المعادلة نحصل على أن س = 18. فإذن عمر هاوي الألغاز 18 سنة.

لنختبر ذلك: سيكون عمره خلال ثلاث سنوات 21 سنة، أما قبل ثلاث سنوات مضت فقد كان عمره 15 سنة. الفرق

$3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18$

أي يساوي العمر الحالي لهاوي الألغاز.

40– كما في المسألة السابقة فإن هذه المسألة يمكن أن تحل بواسطة معادلة بسيطة. لو أن عمر الابن الآن س من السنين فإن عمر الأب 2 س. وقبل ثمان عشرة سنة مضت كان عمر كل منهما أقل بـ 18 سنة: عمر الأب 2 س – 18، وعمر الابن س – 18. عندئذ من المعروف أن الأب كان في ذلك الوقت أكبر من الابن بثلاث مرات.

3 (س – 18) = 2 س – 18

وبحل هذه المعادلة نحصل على س = 36: أي أن عمر الابن الآن 36 سنة وعمر الأب 72 سنة.

41– لنفرض أنه كان في القنينة الأولى في البداية س جم من حامض الكلوريد وكان في القنينة الثانية س جم من الماء. بعد أول نقل أصبح في القنينة الأولى (س–20) جم من الحامض وفي الثانية حامض مع ماء (س+20) جم. بعد النقل الثاني يتبقى في القنينة الثانية $\frac{1}{3}$ (س + 20) جم من السائل أما في الأولى فسيصبح

$$س - 20 + \frac{2}{3}(س + 20) = \frac{5س - 20}{3}$$

بما أننا نعرف أنه يوجد في القنينة الأولى سائل تقل كميته بأربع مرات عما في الثانية، فإن:

$$\frac{4}{3}(س + 20) = \frac{5س - 20}{3}$$

من هنا ينتج أن س = 100، أي أنه كان في كل قنينة 100جم.

42- سنرمز للعدد الابتدائي للروبلات المنفردة بـ س وعدد قطع النقود من فئة 20 كوبيكاً بـ ص. عندئذ كان في محفظتي عندما ذهبت لشراء المشتريات:

(100س + 20ص) كوبيكاً

وعندما رجعت، كان لدي:

(100ص + 20س) كوبيكاً

نحن نعرف المبلغ الأخير وهو أصغر من الأول بثلاث مرات، وبالتالي يكون:

3 (100ص + 20س) = 100س + 20ص

وبإجراء الاختصارات في هذه المعادلة نحصل على:

س = 7 ص

إذا كان ص = 1 فإن س = 7. وبافتراض ذلك فقد كان لدي في البداية من النقود 7 روبلات و20 كوبيكاً. وهذا لا يطابق شرط المسألة (حوالي 15 روبلاً).

فلنجرب ص = 2، عندئذ يكون س = 14. والقيمة الابتدائية تساوي 14 روبلاً و40 كوبيكاً، الأمر الذي يطابق جيداً شرط المسألة.

ويعطي الافتراض ص = 3 مبلغاً كبيراً جداً للنقود: 21 روبلاً و60 كوبيكاً.

وبالتالي فالجواب الملائم الوحيد هو 14 روبلاً و40 كوبيكاً. بعد المشتريات يتبقى روبلان منفردان و14 قطعة من فئة 20 كوبيكاً، أي أن 200 + 280 = 480 كوبيكاً وهذا فعلاً يؤلف ثلث المبلغ الابتدائي ($\frac{1440}{3} = 480$).

وقد تم إنفاق 1440 − 480 = 960. وهذا يعني أن ثمن المشتريات 9 روبلات و60 كوبيكاً.

4

هل تحسن العد ؟

43- هل تحسن العد؟ إن هذا السؤال ربما يعتبر مهيناً بالنسبة لمن تجاوز سنه الثلاث سنوات. من لا يحسن العد؟ ولكي تقول بالترتيب «واحد»، «اثنين»، «ثلاثة» لا يتطلب ذلك مقدرة كبيرة. ولكنه على الرغم من ذلك إني واثق من أنكم أحياناً لا تقومون جيداً بمثل هذا العمل الذي يبدو بسيطاً. والأمر يعتمد على ما يلزم عده. وليس من الصعب عد المسامير في الصندوق. ولكن لنفرض أنه لا يوجد في الصندوق مسامير فقط ولكن مسامير وقلاووظات مختلطة ببعضها البعض. وتلزم معرفة كم هناك من هذا وذاك على حدة. ما الذي ستفعله عندئذ؟ ستضع المسامير بمفردها والقلاووظات بمفردها ومن ثم تعد كلاً منها؟

مثل هذه المسألة تقابل ربة البيت أيضاً عندما تعد الملابس للغسيل. تضع أولاً الملابس حسب النوع: الجاكيتات في كومة والفوط في كومة ثانية، وأكياس الوسائد في كومة ثالثة...إلخ، وبعد أن تنتهي من هذه العملية الشاقة تبدأ في عد كم قطعة في كل كومة.

هذا هو ما يسمى بعدم إجادة العد! لأن مثل هذه الطريقة لعد الأشياء غير المتجانسة غير مريح بتاتاً ويتطلب عمل الكثير ولحد

ما لا يمكن تحقيقه في بعض الحالات. حسناً، إذاً من اللازم عليكم أن تعدوا مسامير أو ملابس: فيمكن توزيعها على أكوام. ولكن ضع نفسك مكان عمل الغابة، الذي يجب عليه أن يعد كم ينمو على الهكتار الواحد من أشجار الصنوبر وكم ينمو على نفس الرقعة من أشجار الشوح وكم من أشجار البتولا وكم من أشجار الحور. في هذه الحالة لا يمكن تقسيم الأشجار حسب النوع وتجميعها مقدماً حسب السلالة. وما الذي تبدأ عدّه أولاً هل هي أشجار الصنوبر ثم أشجار الشوح ثم أشجار البتولا ثم أشجار الحور؟ أربع مرات تمر على نفس المساحة من الأرض؟

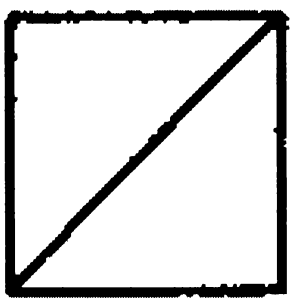
ألا توجد طريقة لعمل ذلك بصورة أسهل بحيث تمر على رقعة الأرض مرة واحدة؟ نعم، توجد مثل هذه الطريقة يستخدمها عُمّال الغابات منذ زمن بعيد. سأريك فيم تنحصر هذه الطريقة على مثال عد المسامير والقلاووظات.

لكي نعد كم في العلبة من مسامير وقلاووظات مرة واحدة دون أن نقسمها في البداية حسب أنواعها، خذ معك قلم رصاص وورقة مقسمة كالآتي:

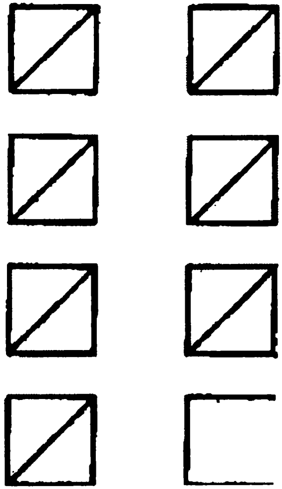
مسامير	قلاووظات

بعد ذلك ابدأ العد. خذ من العلبة كل ما يقع في يدك أولاً. فإذا كان مسماراً فتؤشر على الورقة بشرطة في مكان المسامير، إذا كان قلاووظاً فتؤشر بشرطة في مكان القلاووظات. خذ القطعة الثانية وافعل نفس الشيء. خذ ثالث قطعة...إلخ، إلى أن يخلو الصندوق تماماً. في نهاية العد سيكون على الورقة في خانة المسامير عدداً من الشرطات يساوي عدد المسامير التي كانت موجودة في الصندوق وفي خانة القلاووظات عدد من الشرطات يساوي عدد القلاووظات. يبقى فقط حصر الشرطات التي على الورقة.

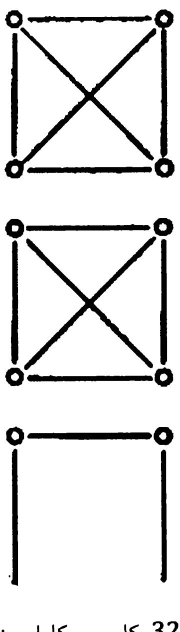
ويمكن تبسيط عد الشرطات وإسراعه إذا لم نضعها ببساطة واحدة بجانب الأخرى بل جمعناها كل خمس سوية، وعلى سبيل المثال بالأشكال المبينة على الشكل 30. من الأفضل تجميع المربعات من هذا الشكل في أزواج أي بعد أول 10 شرطات نضع الشرطة الحادية عشرة في سطر جديد، وعندما يتكون مربعان في الشرط الثاني نبدأ المربع التالي في السطر الثالث...إلخ. وستوضع الشرطات عندئذ تقريباً في نظام كالمبين على الشكل 31.



شكل 30. شرطات يستحسن جمعها كل خمس سوية



شكل 31. هكذا ترتب نتائج العد



شكل 32. كل مربع كامل يعني 10

إن تعداد الشرطات الموضوعة بهذه الطريقة سهل جداً: فأنت ترى مباشرة أنه توجد هنا ثلاث عشرات كاملة، وخمسة واحدة وثلاث شركات أيضاً أي أن المجموع 30 + 5 + 3 = 38 .

ويمكن استخدام أشكال من نوع آخر، ومثلاً تستخدم في كثير من الأحيان العلامات حيث يرمز كل مربع كامل لعشرة (شكل 32).

ويجب عليك عند حساب الأشجار مختلفة الأنواع على مساحة معينة من الغابة أن تفعل نفس الشيء ولكن سيكون لديك على الورقة لا خانتين وإنما أربع خانات. ومن الأفضل هنا ألا تكون لدينا خانات رأسية وإنما أفقية. وقبل العد تحمل الورقة الشكل المبين على الشكل 33.

في نهاية العد يتكون على الورقة تقريباً ما هو مبين على الشكل 34.

ومن السهل جداً في هذه الحالة أن نحصل على النتيجة النهائية:

أشجار الصنوبر 53 ، أشجار البتولا 46

أشجار الشوح 79 ، أشجار الحور 37

ويمكن لربة البيت أن تفعل نفس الشيء لدى وضع قائمة بالملابس اللازم غسلها فتختصر الجهد والوقت.

إذا كان يلزمنا، مثلاً، معرفة أنواع المزروعات وكم عددها على رقعة صغيرة من المرعى فأنت الآن على معرفة بطريقة حل هذه المسألة في أقصر وقت ممكن. تكتب على ورقة مسبقاً أسماء

المزروعات التي لاحظتها مع إبقاء خانة لكل نوع وتترك عدة خانات احتياطية للمزروعات التي قد تصادفك أيضاً. ستبدأ العد مثلاً بورقة كالمبينة على الشكل 35.

أشجار الصنوبر	
أشجار الشوح	
أشجار البتولا	
أشجار الحور	

شكل 33. جدول لعد الأشجار في الغابة

أشجار الصنوبر	
أشجار الشوح	
أشجار البتولا	
أشجار الحور	

شكل 34. شكل الجدول بعد عملية العد

سن الأسد	
ورد الحب	
مزمار الراعي	
زنبق الوادي	
زهرة القرون	

شكل 35. كيف يجب البدء في عد المزروعات في منطقة المرج

بعد ذلك يجب القيام بنفس ما صنعناه عند عد الأشجار في مساحة معينة من الغابة.

44- لماذا تعد أشجار الغابة؟ يبدو هذا لسكان المدينة عملية غير ممكنة. وفي رواية ليف توليستوي «آنا كارنينا» يسأل ليفين خبير الاقتصاد الزراعي قريبه الذي لا يعرف شيئاً عن هذا، والذي يعتزم بيع غابة:

- هل عددت الأشجار؟

ويجيب هذا باستغراب:

- كيف تعد الأشجار؟ عد الرمال، أشعة الكواكب على الرغم من أنه يمكن أن يقوم به عقل كبير...

- حسناً، ولكن العقل الكبير لريبينين (التاجر) يستطيع ذلك ولن يشتري أي فلاح شيئاً دون أن يعد.

يجري تعداد الأشجار في الغابة لكي يحدد عدد الأمتار المكعب من الخشب فيها. ولا تعد أشجار الغابة كلها ولكن يعد جزء معين مساحته ربع أو نصف هكتار يجري اختياره بحيث يكون تكوين وكثافة وسمك وارتفاع أشجاره ذات معدل متوسط بالنسبة لهذه الغابة. وللاختيار الصحيح لمثل هذه «المساحة التجريبية» يجب بالطبع، أن تكون لديك عين خبيرة. وعند العد لا يكفي تحديد عدد الأشجار من كل نوع، ولكن يلزم أيضاً معرفة عدد الجذور ذات السمك المعين: كم منها ذات سمك 25 سم وكم ذات سمك 30 سم وكم ذات سمك 35 سم...إلخ. ولذلك من الضروري أن

يوجد في الكشف أكثر من أربع خانات حتى في حالتنا المبسطة. ويمكن أن تتخيل الآن كم عدد المرات كان يجب أن نجول الغابة لو أننا عددنا الأشجار بالطريقة العادية وليس كما هو وارد هنا.

وكما ترى يكون العد عملية سهلة وبسيطة فقط عند عد الأشياء المتجانسة. أما إذا كان لا بد من معرفة عدد أشياء غير متجانسة فيلزم استعمال الطرق الخاصة التي بيّناها تواً والتي لا يعرف الكثيرون بوجودها.

5

ألغاز عددية

45- مائة روبل مقابل خمسة روبلات. قدم أحد العدادين المسرحيين في إحدى حفلاته للمشاهدين الاقتراح المغري التالي:

- أعلن أمام المشاهدين أنني سأدفع 100 روبل لكل من يعطيني 5 روبلات بعشرين قطعة من فئة 50، 20 و5 كوبيكات. مائة روبل مقابل خمس! من يرغب؟

خيم السكون على القاعة.

وغرق المشاهدون في التفكير. وجرت الأقلام على صفحات المفكرات، ولكن لم يصل أي اقتراح جوابي.

- أرى أن المشاهدين يجدون أن 5 روبلات مبلغ كبير جداً لأخذ 100 روبل. فلتسمحوا لي أن أخصم روبلين وأحدد سعراً منخفضاً هو 3 روبلات بعشرين قطعة من الفئات المذكورة. أدفع 100 روبل مقابل ثلاثة روبلات! ليقف الراغبون في طابور!

ولكن لم يقف أحد في الطابور. لقد أبطأ المتفرجون في استغلال هذه المناسبة النادرة.

- أمن المعقول أن تكون ثلاثة روبلات مبلغاً كبيراً! حسناً، سأخصم من المبلغ روبلاً آخر، ادفعوا بالعشرين قطعة المبينة روبلين فقط وسأعطيكم حالاً مائة روبل.

بما أنه لم يبدِ أحد استعداده للمقايضة، فقد استطرد العداد يقول:

- قد تكون معكم نقود من فئات صغيرة؟ لا تخجلوا من ذلك، سأصدقكم وأعتبرها سلفة. أعطوني فقط على ورقة كم من القطع من كل نوع ستتكفلون بإعطائها لي.

46- الألف. هل تستطيع أن تعبر عن العدد 1000 بثمانية أرقام واحدة؟

يسمح عند ذلك بالإضافة إلى الأرقام باستخدام علامات العمليات المختلفة.

47- أربع وعشرون. من السهل جداً أن نعبر عن العدد 24 بثلاث ثمانيات 8 + 8 + 8. ولكن هل تستطيع أن تفعل نفس الشيء لا باستخدام الثمانيات وإنما باستخدام ثلاث أرقام أخرى متساوية؟ للمسألة عدة حلول.

48- ثلاثون. من السهل التعبير عن العدد ثلاثين بثلاث خمسات 5 × 5 + 5. والأصعب من ذلك أن نجريه بأعداد متساوية أخرى. جرب، قد تستطيع أن تجد عدة حلول؟

49- الأرقام الناقصة. في هذا المثال عن الضرب استبدل أكثر من نصف الأرقام بنجوم:

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times \quad 3*2 \\ \hline *3* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3*2* \\ + \quad *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

هل تستطيع أن تضع الأرقام الناقصة؟

50- ما هي الأعداد؟ إليكم مسألة أخرى من هذا النوع. المطلوب تحديد، الأعداد التي تضرب في المثال التالي:

$$\begin{array}{r} **5 \\ \times \quad 1** \\ \hline 2**5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13*0 \\ + \quad *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

51- ما الذي قسمناه؟ ضع الأرقام الناقصة في مثال القسمة الآتي:

$$\begin{array}{rl} *2*5* & \Big| \\ - \quad *** & \\ \hline *0** & \\ - \quad *9** & \\ \hline *5* & \\ - \quad *5* & \end{array} \qquad \frac{3}{1}$$

52- القسمة على 11. اكتب أي عدد مؤلف من تسعة أرقام بحيث لا توجد فيه أرقام مكررة (كل الأرقام مختلفة)، والذي يقسم بدون باق على 11.

اكتب أكبر هذه الأعداد.

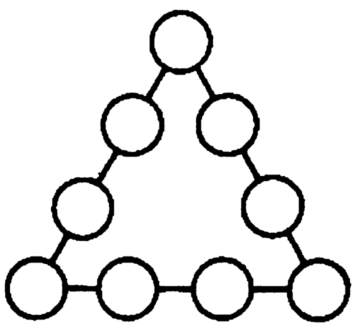
اكتب أصغر هذه الأعداد.

53- حالات غريبة لعملية الضرب. فلتنظروا الحالة الآتية لضرب عددين:

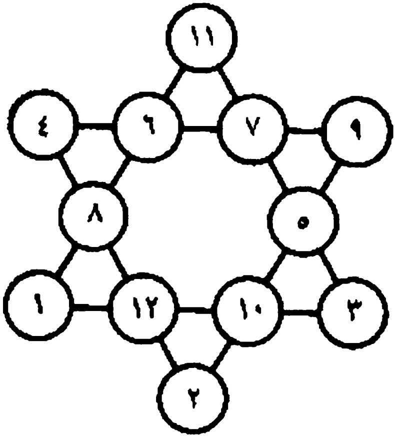
$$7632 = 159 \times 48$$

فهي مثيرة لأنه تشترك فيها مرة واحدة كل الأرقام التسعة. هل تستطيعون اختيار عدة أمثلة كهذا المثال؟ وكم عددها إذا كانت توجد عموماً؟

54- المثلث العددي. في دوائر هذا المثلث (شكل 36) ضع كل الأرقام التسعة بحيث يكون مجموعها على كل جهة يساوي 20.



شكل 36. ضع في الدوائر تسعة أرقام



شكل 37. نجمة عددية ذات ستة رؤوس

55- مثلث عددي آخر. ضع الأعداد في دوائر نفس المثلث (شكل 36) بحيث يكون مجموع كل جانب مساوياً لـ 17.

56- النجمة السحرية. للنجمة العددية ذات الستة رؤوس المبينة على الشكل 37 خاصية «سحرية»: فإن جميع الصفوف الستة للأعداد يكون لها نفس المجموع:

26 = 9 ÷ 7 + 6 + 4

26 = 2 + 12 + 8 + 4

26 = 2 + 10 + 5 + 9

26 = 1 + 8 + 6 + 11

26 = 3 + 5 + 7 + 11

26 = 3 + 10 + 12 + 1

ولكن مجموع الأعداد الموضوعة على رؤوس النجمة مختلف:

4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30

ألا تستطيعون من تحسين هذه النجمة بحيث تضع الأعداد في الدوائر بشكل يجعل الصفوف الستة ذات مجموع واحد (26) وكذلك مجموع الأعداد على رؤوس المثلث يساوي نفس المجموع الأول (26)؟

حل الألغاز 45-56

45- إن كل المسائل الثلاث الغير قابلة للحل، كان العداد يستطيع أن يعد بإعطاء أي جائزة لحلها. لكي نتأكد من ذلك نستعين بعلم الجبر وسننظر المسائل واحدة تلو الأخرى.

دفع الـ 5 روبلات. لنفرض أن الدفع ممكن، ومن أجل ذلك لزم س قطعة من فئة 50 كوبيكاً، و ص قطعة من فئة 20 كوبيكاً و ع قطعة من فئة 5 كوبيكات، عندئذ تكون لدينا المعادلة:

50 س + 20 ص + 5 ع = 500

بالاختصار على 5 نحصل على:

10 س + 4 ص + ع = 100

بالإضافة إلى ذلك، بما أن العدد الكلي للقطع النقدية تبعاً للشرط يساوي 20، فإن س، ص و ع مرتبطة ببعضها بمعادلة أخرى:

س + ص + ع = 20

بطرح هذه المعادلة من المعادلة الأولى، نحصل على :

$$9 \text{ س} + 3 \text{ ص} = 80$$

وبقسمتها على 3، نوصل المعادلة إلى الشكل:

$$3\text{س} + \text{ص} = 26\frac{2}{3}$$

ولكن 3 س – العدد الثلاث للقطع النقدية من فئة الـ 50 كوبيكاً هو بلا شك عدد صحيح. كما أن عدد القطع النقدية من فئة الـ 20 كوبيكاً ص هو عدد صحيح أيضاً. ولكن مجموع عددين صحيحين لا يمكن أن يكون كسراً ($26\frac{2}{3}$). وافتراضنا أن هذه المسألة قابلة للحل، يؤدي كما نرى إلى المستحيل، وهذا يعني أن المسألة غير قابلة للحل.

بنفس الطريقة يستطيع القارئ أن يتأكد من أن المسألتين الأخريين «الرخيصتين» غير قابلتين للحل أيضاً: عند دفع 3 روبلات وروبلين. الأولى توصل إلى المعادلة:

$$3 \text{ س} + \text{ص} = 13\frac{1}{3}$$

وتؤدي الثانية إلى المعادلة:

$$3 \text{ س} + \text{ص} = 6\frac{2}{3}$$

وكلتاهما لا تحلان بالأعداد الصحيحة.

وكما ترون فإن العداد لم يغامر بتاتاً عندما اقترح مبالغ ضخمة لحل هذه المسائل. ولن يتم منح المكافآت أبداً.

أما إذا كان قد طلب أن يدفع بعشرين قطعة نقدية ذات الفئة المذكورة ليس 5 روبلات وليس 3 ولا روبلين ولكن 4 روبلات مثلاً، فعندئذ تحل المسألة بسهولة بسبع طرق مختلفة(*).

46– $1000 = 8 + 8 + 8 + 88 + 888$

وتوجد حلول أخرى.

47– إليك هذين الحلين:

$22 + 2 = 24$ ، $3^3 - 3 = 24$

48– نورد ثلاثة حلول:

$6 \times 6 - 6 = 30$ ، $3^3 + 3 = 30$ ، $33 - 3 = 30$

49– نكمل الأعداد الناقصة تدريجياً إذا التزمنا بالأسلوب التالي في التفكير.

وللسهولة سنضع أرقاماً للأسطر:

```
I       *1*
             ×
II      3*2
-------------
III     *3*
```

```
IV     3*2*
             +
V      *2*5
-------------
VI   1*8*30
```

(*) إن أحد الحلول الممكنة هو: 6 قطع من فئة 50 كوبيكاً وقطعتان من فئة عشرين كوبيكاً و12 قطعة من فئة 5 كوبيكات.

من السهل إدراك أن آخر نجمة في السطر III هو الرقم الصفر: هذا واضح من أن الصفر يوجد في آخر السطر VI .

والآن نحدد قيمة النجمة الأخيرة للسطر الأولى I : هذا الرقم الذي يعطي من ضربه في 2 عدداً ينتهي بصفر، ويعطي من ضربه في 3 عدداً ينتهي بـ 5 (السطر V). ولا يمكن أن يكون هذا الرقم سوى 5.

وواضح بعد ذلك أنه في نهاية السطر IV يوجد الرقم صفر. (قارن الأرقام الواقعة في المكان الثاني من النهاية في السطور III و VI !).

ومن السهل معرفة ما الذي يختفي تحت النجمة في السطر II : 8، لأن 8 فقط تعطي عندما تضرب في العدد 15 النتيجة التي تنتهي بـ 20 (السطر IV).

وفي النهاية تصبح واضحة قيمة النجمة الأولى في السطر I : إنه الرقم 4، لأن 4 فقط تعطي عند ضربها في 7 النتيجة التي تبدأ بـ 3 (السطر IV) ومعرفة بقية الأرقام الآن لا تمثل أي صعوبة، فيكفي ضرب الأعداد في السطرين الأولين اللذين تم تحديدهما الآن.

في النهاية نحصل على مثال الضرب الآتي:

$$\begin{array}{r} 415 \\ \times \\ \underline{382} \\ 830 \\ \\ \\ 3320 \\ + \\ \underline{1245} \\ 158530 \end{array}$$

50- وبنفس الطريقة التي أوردناها في المثال السابق يمكن تحديد قيمة النجوم في الحالة هذه.

نحصل على:

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times \\ \underline{147} \\ 2275 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1300 \\ + \\ \underline{325} \\ 47775 \end{array}$$

51- وإليك حالة القسمة المطلوبة:

$$\begin{array}{l|l} 52650 & 3 \\ -\ \underline{325} & 1 \\ 2015 & \\ -\ \underline{1950} & \\ 650 & \\ -\ 650 & \end{array}$$

52- لحل هذه المسألة تلزم معرفة شرط القسمة على 11. يقسم العدد على 11 إذا كان الفرق ما بين مجموع الأرقام الواقعة في الأماكن الزوجية ومجموع الأرقام الواقعة في الأماكن الفردية يقسم على 11 أو يساوي الصفر. فلنختبر، على سبيل المثال، العدد 23658904 .

مجموع الأرقام التي في الأماكن الزوجية:

$21 = 4 + 9 + 5 + 3$

ومجموع الأرقام التي في الأماكن الفردية:

2 + 6 + 8 + 0 = 16

الفرق بينهما (يلزم طرح الأصغر من الأكبر) يساوي:

21 – 16 = 5

هذا الفرق (5) لا يقسم على 11 وهذا يعني أن العدد الذي أخذناه لا يقسم بدون باقي على 11

فلنجرب عدداً آخر 7344535 ؛

3 + 4 + 3 = 10 ، 7 + 4 + 5 + 5 = 21 ، 21 – 10 = 11

بما أن 11 تقسم على 11 إذن فالعدد المختار من مضاعفات 11.

والآن من السهل أن نعرف كيف يمكن كتابة الأرقام التسعة لكي نحصل على عدد مكرر لـ 11 ويحقق متطلبات المسألة:

وعلى سبيل المثال: 352049786

نجرب 3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22 ، 5 + 0 + 9 + 8 = 22

الفرق 22 – 22 = صفر. وهذا يعني أن العدد المختار من مكررات الـ 11.

إن أكبر عدد من هذه الأعداد هو: 987652413 وأصغرها: 102347586.

53– يستطيع القارئ الصبور أن يجد تسع حالات لمثل هذا الضرب وهي كالآتي:

$5796 = 483 \times 12$ ، $7632 = 159 \times 48$

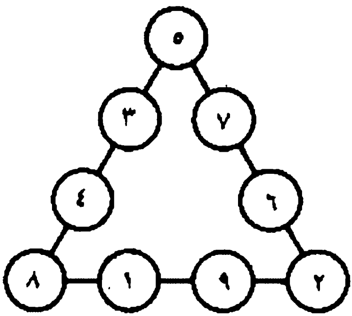
$5796 = 138 \times 42$ ، $4396 = 157 \times 28$

$5346 = 297 \times 18$ ، $6952 = 1738 \times 4$

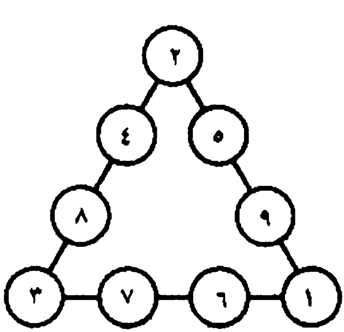
$5346 = 198 \times 27$ ، $7852 = 1963 \times 4$

$7254 = 186 \times 39$ ،

54-55- الحلول مبينة على الشكلين 38 و39 المرفقة. يمكن إعادة وضع الأرقام المتوسطة لكل صف مكان بعضها البعض الآخر، وبالتالي نحصل على مجموعة حلول أخرى.



شكل 38

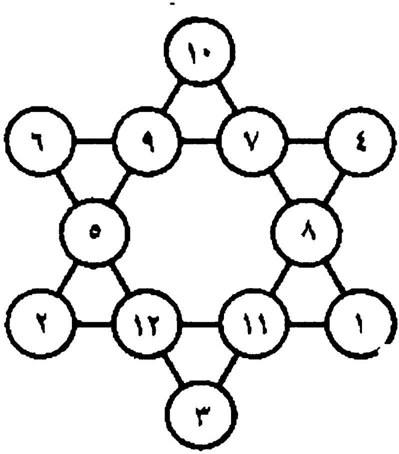


شكل 39

56- لتسهيل إيجاد الوضع المناسب للأعداد سنتبع المفاهيم الآتية.

إن مجموع الأعداد على أطراف النجمة المطلوبة يساوي 26، ومجموع كل أعداد النجمة 78. هذا يعني أن مجموع الأعداد لسداسي الأضلاع الداخلي يساوي 78 – 26 = 52.

لنبحث بعد ذلك أحد المثلثات الكبيرة. مجموع أعداد كل من أضلاعه يساوي 26، فلنجمع أعداد كل الأضلاع الثلاثة – نحصل على 26 × 3 = 78، مع العلم أن كلًّا من الأعداد التي في الزوايا يتكرر مرتين. وبما أن مجموع أعداد الأزواج الثلاثة الداخلية (أي مجموع الأعداد لسداسي الأضلاع الداخلي) يجب، ونحن نعرف ذلك، أن يساوي 52، فإن المجموع المضاعف للأعداد على رؤوس كل مثلث يساوي 78 – 52 = 26، أما المجموع مرة واحدة = 13.



شكل 40

ولقد ضاق مجال البحث الآن كثيراً. فنحن نعرف، مثلاً، أن لا 12 ولا 11 لا يمكن أن تحتل أماكن في رؤوس النجمة (لماذا؟). وهذا يعني أنه يمكن بدء التجارب من 10 بحيث يتحدد مرة واحدة العددان اللذان يجب أن يحتلا رأسي المثلث الآخرين: 1 و 2.

وبمواصلة السير قدماً بهذه الطريقة يمكن لنا في النهاية إيجاد الوضع المطلوب. وهذا الوضع مبين على الشكل 40.

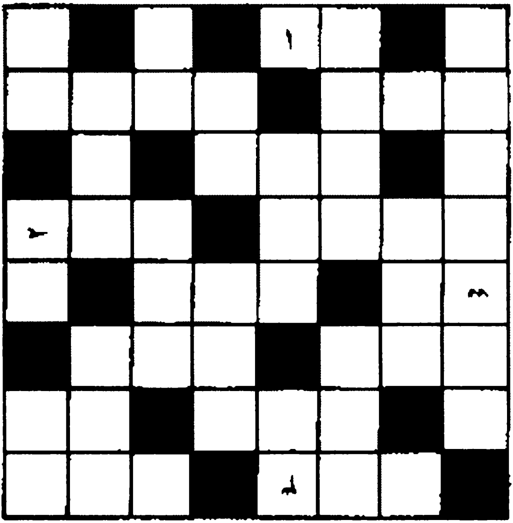
6

المراسلة بالشفرة

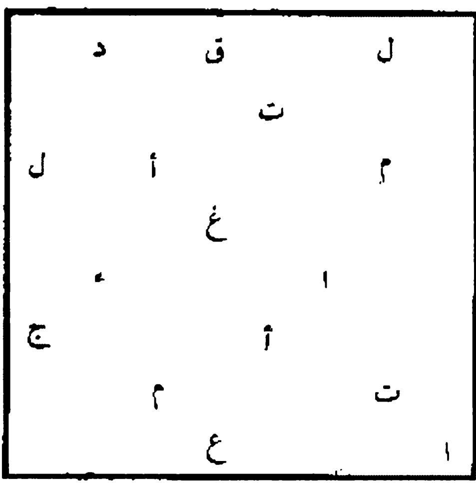
57- **الشبكة.** يضطر الثوري الذي يمارس العمل السري أن يكتب كتاباته ورسائله مع الرفاق بحيث لا يستطيع أحد آخر أن يفهم ما هو المكتوب. من أجل ذلك تستخدم طريقة خاصة للكتابة تسمى بـ «الكتابة السرية» أو «الكريبتوجرافيا». توجد أساليب مختلفة للكتابة السرية ويستخدمها ليس الذين يعملون في العمل السري فقط ولكن أيضاً الدبلوماسيون والعسكريون للمحافظة على أسرار الدولة. وسنتحدث بعد ذلك عن إحدى طرق الكتابة السرية، وبالذات تلك المسماة بطريقة «الشبكة». هذه الطريقة تنتمي إلى الطرق البسيطة نسبياً ومرتبطة ارتباطاً قوياً بالحساب.

يجب على الأفراد الذين يريدون أن يمارسوا الكتابة السرية بهذه الطريقة أن يتزودوا بـ «شبكة»، وهي عبارة عن مربع ورقي حُفرت عليه مربعات.

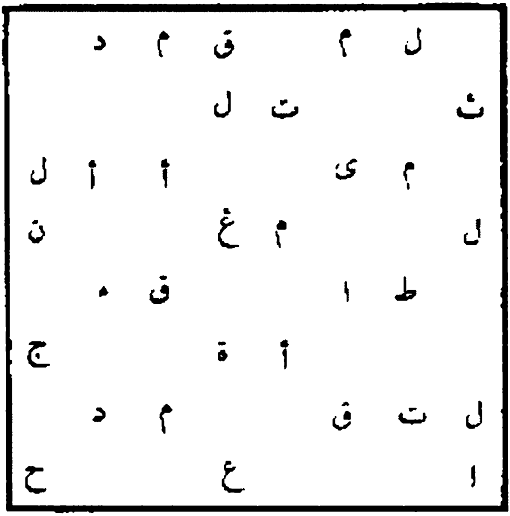
وترون نموذج الشبكة على الشكل 41. وتوضع الفتحات لا بطريق عشوائي، ولكن بنظام معين سيتضح لكم فيما بعد.



شكل 41. شبكة للكتابة السرية (اعمل مثل هذه الشبكة من الورق واقرأ الكتابة السرية على الشكل 45)



شكل 42. برفع الشبكة نرى الكتابة



شكل 43. نكتب بعد ذلك الـ 16 حرفاً التالية

لنفرض أن المطلوب إرسال الرسالة التالية إلى رفيق: **لقد تم إلغاء اجتماع ممثلي المنطقة. لقد حذر أحدهم دائرة البوليس. الرفيق أنطون.**

يضع الكاتب الشبكة على قطعة ورق، ويكتب الرسالة حرفاً بعد حرف في فتحات الشبكة. بما أن عدد الفتحات 16، فأولاً يكتب فقط جزء من الرسالة: لقد تم إلغاء اجتماع...

وعند نزع الشبكة، نرى الكتابة المبينة على الشكل 42.

ومن الواضح أنه لا يوجد هنا أي شيء سري بعد، ويمكن لأي فرد أن يفهم ببساطة الكلام المكتوب. ولكن هذه هي البداية فقط. لن تبقى الرسالة على هذا الشكل. المختفي يدير الشبكة في

اتجاه عقرب الساعة بربع دورة، أي يضعها على نفس قطعة الورق بحيث إن العدد 2 الذي كان سابقاً في الجنب، يكون الآن إلى أعلى. عند الوضع الجديد للشبكة تكون جميع الحروف المكتوبة سابقاً مغطاة، أما في الفتحات فتظهر ورقة بيضاء. تكتب في هذه الفتحات الـ 16 حرفاً التالية من البرقية السرية. ولو أننا نزعنا الشبكة عندئذ لحصلنا على الكتابة المبينة على الشكل 43. هذه الكتابة لن يفهمها ليس فقط الإنسان الخارجي بل ونفس من كتبها لو أنه نسي نص رسالته.

ولكن مكتوب الآن فقط نصف الرسالة وبالذات: **لقد تم إلغاء اجتماع ممثلي المنطقة. لقد حـ ...**

للكتابة ما بعد ذلك، تلزم إدارة الشبكة بمقدار ربع دورة في اتجاه عقرب الساعة. ستغطي كل ما هو مكتوب ويظهر 16 مربعاً خالياً. وتجد لها مكاناً في هذه المربعات عدة كلمات أخرى، وتأخذ الرسالة الشكل المبين على الشكل 44.

وفي النهاية يعمل الدوران النهائي بحيث يكون العدد 4 إلى أعلى ويكتب في الـ 16 مربعاً البيضاء نهاية الرسالة. إذا اتضح أن هناك مربعات خالية فيكتب فيها أ ب ت... حتى لا تكون في الرسالة فراغات وتأخذ الرسالة الشكل المبين على الشكل 45.

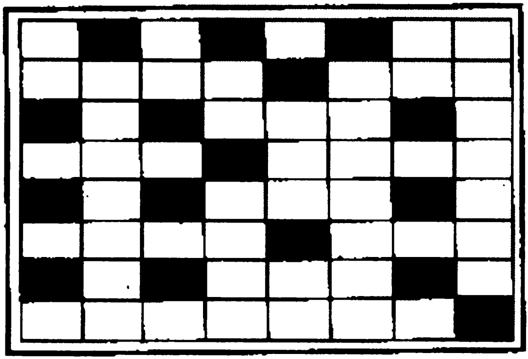
فلتحاول أن تعرف أي شيء من هذا الشكل. ولتقع الرسالة في يد البوليس ويشتبه البوليس في أمرها قدر ما يريد، في أنها تحتوي على شيء هام، فلا يمكن أن يعرف مكنون الرسالة إلا الشخص المرسلة إليه فقط الذي يمتلك مثل تلك الشبكة التي استخدمها المرسل بالضبط.

ر	د	م	ق	ذ	م	ل	
	ح		ل	ت	أ		ث
ل	أ	أ	ه		ى	م	د
ن		د	غ	م		م	ل
	ء	ق		ا	ا	ط	
ج	ة		ة	أ	ر		ة
	د	م	أ		ق	ت	ل
ح	و		ع	ب		ل	ا

شكل 44. يجب من جديد إدارة الشبكة

ر	د	م	ق	ذ	م	ل	ل
ا	ح	س	ل	ت	أ	ى	ث
ل	أ	أ	ه	ل	ى	م	د
ن	ف	د	غ	م	ر	م	ل
ا	ء	ق	ق	ا	ا	ط	ى
ج	ة	ط	ة	أ	ر	ن	ة
ن	د	م	أ	و	ق	ت	ل
ح	و	ب	ع	ب	أ	ل	ا

شكل 45. الكتابة السرية جاهزة



شكل 46. شبكة على شكل كارت بريدي

كيف سيقرأ المرسل إليه هذه الرسالة السرية؟ سيضع شبكته على الرسالة بحيث يكون الرقم 1 إلى أعلى ويكتب تلك الحروف التي تظهر في الفتحات وستكون هذه هي الـ 16 حرفاً الأولى من الرسالة. ثم يدير الشبكة فتظهر أمامه الـ 16 حرفاً التالية. وبعد أن يدير الشبكة للمرة الرابعة ستكون الرسالة كلها قد قرئت. يمكن أن تستخدم بدلاً من الشبكة المربعة شبكة مستطيلة على شكل كارت بريدي ذي فتحات عريضة (شكل 46) تكتب فيها أجزاء الكلمات وليس الحروف فقط، وفي بعض الأحيان كلمة كاملة لو أمكن وضعها في الفتحة.

لا تفكر أن الكتابة ستكون في هذه الحالة ممكنة القراءة أكثر مما في الطريقة الأولى. كلا البتة، على الرغم من أن مقاطع بل كلمات كاملة منها واضحة ولكنها مختلطة في ترتيب غير معقول بحيث إن السر يبقى في حرز حريز. وتوضع الشبكة المستطيلة أولاً بحيث يكون أحد جوانبها إلى أعلى، ثم العكس، وبعد ذلك تدار في الاتجاه

الأيسر فيم يستخدمونها في الوضعين مرة أخرى. وفي كل وضع جديد تعطي الشبكة كل ما كان مكتوباً سابقاً. ولو كان من الممكن استخدام شبكة واحدة فإن طريقة الكتابة بواسطتها لم تكن لتنفع من حيث السرية. فقد توجد في أيدي البوليس هذه الشبكة الواحدة وينكشف السر بسرعة. ولكن المسألة في أن عدد الشبكات المختلفة كبير جداً.

يبين الشكل 47 جميع الشبكات التي يمكن أن تصنع للمربع المؤلف من 64 خلية. وتستطيع أن تختار للفتحات أي 16 مربعاً، بحيث تأخذ بعين الاعتبار أن يكون عدد المربعات المختارة ليس أكثر من اثنين ذي رقم واحد. وفي الشبكة التي استخدمناها الآن، أخذت الأرقام الآتية للخلايا

١	٥	٩	١٣	٤	٣	٢	١
٢	٦	١٠	١٤	٨	٧	٦	٥
٣	٧	١١	١٥	١٢	١١	١٠	٩
٤	٨	١٢	١٦	١٦	١٥	١٤	١٣
١٣	١٤	١٥	١٦	١٦	١٢	٨	٤
٩	١٠	١١	١٢	١٥	١١	٧	٣
٥	٦	٧	٨	١٤	١٠	٦	٢
١	٢	٣	٤	١٣	٩	٥	١

شكل 47. أكثر من أربعة مليارات شبكة سرية في كل مربع

2، 13 ، 5

8

10 ، 11 ، 3

16

12 ، 14

15 ، 9

6، 7

1، 4

وكما ترى فإنه لا يتكرر أي رقم.

II	I
IV	III

شكل 48. رسم تخطيطي لتوضح الشكل 47

من السهل تفهم نظام وضع الأرقام في المربع (شكل 47). فهو يقسم إلى خطوط عرضية إلى أربع مربعات أصغر يرمز لها للتسهيل بالحروف الرومانية I و II و III و IV (شكل 48). في المربع I رقمت المربعات في تسلسل عادي. والمربع I - هو نفس المربع لكنه يدار فقط بمقدار ربع دورة إلى اليمين. وبإدارته ربع دورة أخرى نحصل على المربع III ، وعند إدارته بمقدار ربع دورة أخرى نحصل على المربع IV .

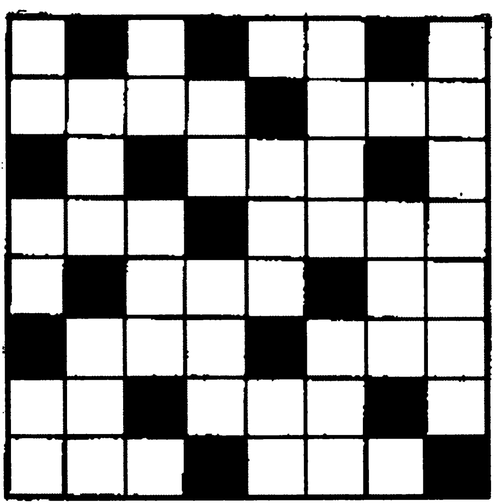
فلنحسب الآن رياضياً كم يمكن أن يكون عدد الشبكات المختلفة. الخلية رقم 1 يمكن أن تؤخذ (كفتحة) في أربع أماكن. وفي

كل حالة يمكن توصيل الخلية رقم 2 بأخذها أيضاً في 4 أماكن. وبالتالي يمكن تحديد فتحتين بـ 4 × 4 أي بـ 16 طريقة. وثلاثة فتحات بـ 4 × 4 × 4 = 64 طريقة. وبالتفكير بهذه الطريقة يمكن تحديد أن 16 فتحة يمكن أن توضع بـ 4^{16} طريقة (حاصل ضرب ست عشرة أربعات). وهذا العدد يزيد عن 4 مليارات. وحتى لو اعتبرنا أن حساباتنا مبالغ فيها بعدة مرات (إذ إنه ليس من المريح استخدام شبكات ذات فتحات متجاورة، ويجب استثناء هذه الحالات) فإنه تتبقى عدة مئات الملايين من الشبكات - محيط كامل ! فلتحاول أن تجد فيه الشبكة المطلوبة.

لو فرضنا أن مجموعة العاملين لفك الشفرة تضيع على تحضير الشبكة والمراجعة، دقيقة واحدة، فلحل شفرة الرسالة يمكن أن تلزم مئات الملايين من الدقائق - أي آلاف من السنين كاملة ولكن كل هذا صحيح فقط في حالة ما إذا كانت عملية فك الشفرة تتم كما يقال بـ «الأيدي المجردة». وفي كتاب «الجبر المسلي» لكاتب هذه السطور يمكن أن تقرأوا عن الحاسبات السريعة. ومثل هذه الماكينات تستطيع بواسطة برنامج معين أن تقوم بمئات الآلاف وحتى ملايين من العمليات الحسابية في الثانية. وهي تستطيع ليس فقط أن تحسب ولكن تستطيع أن تختار كل الشبكات الممكنة واختبار فيما إذا تعطي أي من هذه الشبكات نصاً مفهوماً - ويلزم فقط أن نضع البرنامج المناسب لمثل هذه الماكينة. ولو أن تجربة شبكة واحدة على الماكينة يستلزم، مثلاً، جزءاً واحداً من الألف من الثانية، فلمراجعة مئات الملايين من الشبكات تلزم مئات الآلاف من الثواني أي عدة أيام. وكما ترى فإنه في أيامنا هذه تصبح عملية المحافظة على سرية الرسائل عملية صعبة.

58- كيف يمكن تذكر الشبكة؟ ولكن لنفرض أن الخوف من أن اكتشاف السر بواسطة الماكينات غير موجود. لنقل إن محتوى الرسالة يجب أن يبقى سرياً فقط لمدة 2-3 أيام، ويمكن أن نعتبر هذا الزمن غير كافٍ لمصادرة الرسالة، وإرسالها إلى مركز الحساب وحلها. وقرر العاملون سراً استخدام الشبكة. ومن المفهوم أنه يجب على كلا المتراسلين أن يلتزما اليقظة لكي لا تقع شبكتهما في أيدٍ غريبة. من الأحسن ألا تحفظ الشبكات بل أن تحضر عند استلام الرسالة ثم القضاء عليها بعد قراءة الرسالة. ولكن كيف يمكن حفظ مكان الفتحات؟ هنا تأتي إلينا الرياضيات للمساعدة مرة أخرى. سنرمز للنوافذ بالرقم 1 وسنرمز للمربعات الأخرى بالرقم صفر. عندئذ يأخذ أول صف من مربعات الشبكة هذا الرمز (شكل 49):

01010010



شكل 49. الشبكة الحسابية السرية

أو بحذف الصفر الأخير:

1010010

يرمز للصف الثاني بعد حذف الأصفار الأخيرة بالآتي:

1000

الصفوف التالية ستأخذ الرموز الآتية:

10001000	10100010
100010	10000
10001	1000100

لتبسيط كتابة هذه الأعداد سنعتبر أنها مكتوبة لا بالنظام العشري الذي يستخدم عادة ولكن بالنظام «الثنائي». هذا يعني أن الواحد أكبر من الذي بجانبه الواقع إلى اليمين لا بـ 10 مرات ولكن بمرتين فقط. والواحد في نهاية العدد يعني، كالمعتاد، واحد عادي، والواحد في المكان قبل الأخير يعني اثنين، في المكان الثالث من النهاية – أربعة، في الرابع – ثمانية، في الخامس – 16...إلخ. عند هذا الفهم يعني العدد 1010010 الذي يبين وضع الفتحات في الصف الأول يضم آحاداً بسيطة:

$$82 = 2 + 16 + 64$$

لأن الأصفار تدل على عدم وجود آحاد من هذه الرتبة.

والعدد 1000 (الصف الثاني) يحل محله في النظام العشري العدد 8.

يلزم تغيير الأعداد الأخرى بالأعداد التالية:

162 = 2 + 32 + 128

16

68 = 4 + 64

136 = 8 + 128

34 = 2 + 32

17 = 1 + 16

إن حفظ الأعداد 82 ، 8 ، 162 ، 16 ، 68 ، 136 ، 34 ، 17 ليست عملية صعبة جداً. وبمعرفتها يمكن دائماً الحصول على المجموعة الأولية للأعداد التي تحصل عليها منها والتي تبين مباشرة وضع الفتحات في الشبكة.

أما كيفية القيام بذلك فسنبينه من مثال العدد الأول 82. سنقسمه على اثنين لكي نعرف كم عدد «الاثنين» فيه، نحصل على 41 ولا يوجد باق - هذا يعني أنه في المكان الأخير في خانة الآحاد البسيطة يجب أن يوجد صفر، وعدد «الاثنين» الذي حصلنا عليه وهو 41 نقسمه على 2 لكي نعرف كم «أربعات» في حالتنا هذه:

41 ÷ 2 = 20 والباقي 1

هذا يعني أن في خانة الاثنين، أي في المكان قبل النهائي يوجد الرقم 1.

بعد ذلك نقسم 20 على 2 لكي نعرف كم عدد «الثمانيات» في هذا العدد:

10 = 2 ÷ 20

لا يوجد باق وهذا يعني أنه في مكان الأربعات يوجد صفر. نقسم 10 على 2 نحصل على 5 بدون باق أي أنه في مكان الثمانيات يوجد صفر.

وبقسمة 5 على 2 نحصل على 2 ويكون الباقي 1. ويكون في هذه الخانة الرقم 1. وفي النهاية نقسم 2 على 2 ونعرف أنه في الخانة التالية صفر أما في الخانة النهائية 1 (هذه الخانة تقابل 64).

وهكذا تحددت جميع أرقام العدد المطلوب.

1010010

بما أنه توجد هنا 7 أرقام فقط وفي كل صف من الشبكة توجد 8 مربعات فواضح أن صفر في الأمام قد فقد ويتحدد وضع الفتحات في الصف الأول بالأعداد:

01010010

أي أن الفتحات في الأماكن: الثاني والرابع والسابع.

وبنفس الطريقة تحدد الفتحات في الصفوف الأخرى.

توجد، كما ذكرنا سابقاً، مجموعة نظم مختلفة للكتابة السرية. ولقد تطرقنا إلى الشبكة لأنها تمس الرياضيات عن قرب وتثبت مرة أخرى كم هي مختلفة نواحي الحياة التي يتناولها هذا العلم.

7

حكايات عن الأعداد العملاقة

59- صفقة رابحة. متى وأين حدثت هذه القصة - غير معروف. وربما لم تحدث بتاتاً، والأرجح أن يكون الأمر كذلك. ولكن مهما يكن فهذه الرواية طريفة جداً، وجديرة بالسماع.

1) عاد المليونير الغني من غيبته مسروراً أكثر من المعتاد: لقد حدثت له في الطريق مقابلة سعيدة، أتت له بأرباح كبيرة.

وروى لأهل بيته قائلاً: «يا له من حظ سعيد. ويبدو أنه ليس عبثاً أن يقول الناس إن النقود تدر نقوداً. وها هي النقود تجري إلى نقودي. وبدون سابق إنذار! لقد قابلت في الطريق رجلاً لا أعرفه، لا يبدو عليه أنه ذو منزلة. ولم أكن لأبدأ معه الحديث لولا أن بدأه هو عندما أحس أنني في سعة من أمري. واقترح علي في نهاية الحديث صفقة رابحة، لدرجة أنها حبست عليّ أنفاسي.

قال محدثي: لنتفق على ما يلي - سأحضر لك مبلغ مائة ألف روبل يومياً طيلة شهر كامل. ليس بدون مقابل، طبعاً، ولكن الثمن تافه. في أول يوم ستدفع، تبعاً للاتفاق، ومن المضحك قول ذلك، كوبيكاً واحداً فقط.

لم أصدق سمعي، فأعدت سؤاله:

- كوبيكاً واحداً؟

قال:

- كوبيكاً واحداً، وعن المائة ألف الثانية ستدفع كوبيكين.

ولم أتمالك نفسي، فقلت:

- حسناً، وبعد؟

- وبعد، تتقاضى عن المائة ألف الثالثة 4 كوبيكات، وعن الرابعة 8 كوبيكات، وعن الخامسة 15 كوبيكاً. وهكذا لمدة شهر، كل يوم ضعف اليوم الذي يسبقه.

فسألت:

- وبعد ذلك؟

قال:

- لا شيء، لن أطالبك بشيء آخر شرط أن تلتزم جيداً بالاتفاق. فسآتي صباح كل يوم بالمائة ألف روبل، وأنت تدفع ما اتفقنا عليه. ولا تحاول أن تنهي العملية قبل انتهاء الشهر.

هل يصدق أنه يعطيني مئات الآلاف من الروبلات مقابل كوبيكات. وإذا لم تكن النقود مزورة فإن هذا الرجل ليس بكامل عقله. ولكن العملية مربحة ولا يجب تركها.

قلت له:

- حسناً، أحضر النقود. أما نقودي فسأدفعها بكل دقة. وأنت لا تخادع أحضر نقوداً سليمة.

فقال:

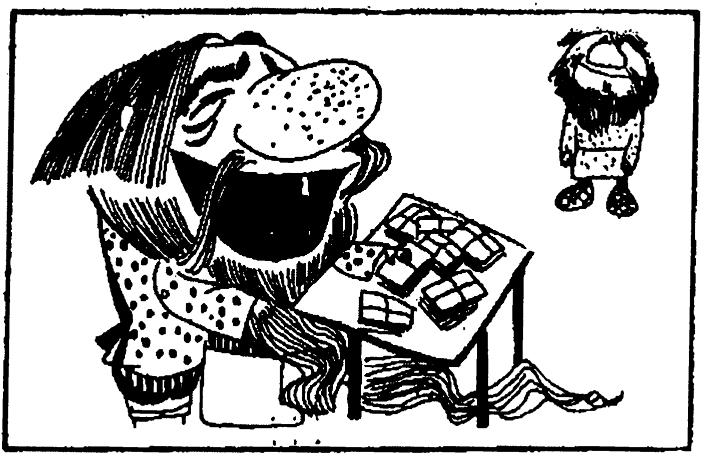
- فلتكن مطمئناً، انتظرني غداً صباحاً.

لكنني أخشى أمراً واحداً: هل سيحضر؟ فقد يدرك أنه قد ارتبط بعمل غير مربح بالمرة، ولكن يوم غد لقريب.

2) مضى يوم. وفي الصباح الباكر طرق شباك الرجل الغني نفس الشخص المجهول الذي قابله في الطريق.

وقال:

- هيئ النقود، لقد أحضرت نقودي.



شكل 50. «مائة ألف سقطت من السماء!»

وفعلاً، أخذ الرجل الغريب عندما دخل الغرفة، يخرج النقود، كانت نقوداً حقيقية، غير مزورة. عدّ مائة ألف روبل بالضبط، وقال:

- ها هي نقودي تبعاً للاتفاق. ها قد جاء دورك في الدفع.

وضع الغني على المنضدة كوبيكاً نحاسياً، وانتظر بتحفز هل سيأخذ الضيف القطعة النحاسية أم أنه سيعيد التفكير ويطالب بإعادة نقوده. نظر الضيف إلى الكوبيك ووزنه في يده وأخفاه في حقيبته.

قال:

- انتظرني غداً في نفس هذا الوقت. ولكن لا تنسَ إحضار الكوبيكين، ثم خرج.

لم يصدق الغني أن حالفه التوفيق: مائة ألف سقطت من السماء! عدّ النقود مرة أخرى، وتأكد جيداً أنها غير مزورة، وكل شيء على ما يرام، وأخفى النقود بعيداً عن الأعين وأخذ ينتظر وجبة الغد. وفي الليل راودته الشكوك: ألا يجوز أن يكون قاطع طريق قد تظاهر بالبساطة لكي يعرف أين أخفي النقود ثم يهجم بعصابة من اللصوص؟

أغلق الغني الأبواب جيداً، وبحلول المساء صار يتطلع من النافذة ويدقق السمع ولم يستطع أن يغفو لفترة طويلة. وفي الصباح طرق الرجل المجهول النافذة مرة أخرى وأحضر النقود. عد مائة ألف وأخذ كوبيكيه الاثنين وأخفاهما في حقيبته وخرج. وقال عند الوداع:

- هيئ أربعة كوبيكات ليوم غد.

ومرة أخرى فرح الغني فقد حصل على المائة ألف الثانية بلا مقابل. الضيف لا يشبه اللص، لا يتلصص حواليه، ولا يطيل النظر، ولكنه يطلب كوبيكاته فقط. يا له من رجل غريب الأطوار إذا زاد عدد أمثاله على الأرض لعاش الناس الأذكياء في سعة...

وحضر الرجل المجهول في اليوم الثالث، وانتقلت المائة ألف الثالثة إلى الرجل الغني مقابل 4 كوبيكات.

ومرّ يوم آخر، وأحضر الرجل وبنفس الطريقة المائة ألف الرابعة مقابل 8 كوبيكات.

وجاء بالمائة ألف الخامسة مقابل 16 كوبيكاً. ثم السادسة مقابل 32 كوبيكاً.

بعد مضي سبعة أيام من بداية الصفقة، استلم الغني سبعمائة ألف روبل، ودفع مبلغاً تافهاً، هو محسوباً بالكوبيكات: 1 + 2 + 4 + 8 ، 16 + 32 + 64 = روبل واحد و27 كوبيكاً.

لقد أعجب ذلك المليونير البخيل، وأخذ يندم على أنه اتفق على أن يفعل ذلك لمدة شهر واحد. فلن يستطيع أن يأخذ أكثر من ثلاثة ملايين. هل يمكن أن أجعل هذا الغريب يطيل المدة ولو لفترة نصف شهر آخر؟ أخشى أن يفهم أنه يعطي النقود بلا مقابل...

وكان الرجل المجهول يحضر كل صباح بانتظام حاملاً المائة ألف روبل. وفي اليوم الثامن أخذ روبلاً و28 كوبيكاً وفي اليوم التاسع روبلين و56 كوبيكاً وفي اليوم العاشر 5 روبلات و12 كوبيكاً، وفي اليوم الحادي عشر 10 روبلات و24 كوبيكاً وفي اليوم

الثاني عشر 20 روبلاً و48 كوبيكاً وفي اليوم الثالث عشر 40 روبلاً و96 كوبيكاً وفي اليوم الرابع عشر 81 روبلاً و92 كوبيكاً.

كان الغني يدفع هذه النقود بكل سرور إذ أنه قد حصل على مليون و400 ألف روبل وأعطى الرجل المجهول ما يقرب من مائة وخمسين روبلاً فقط.

ولكن لم تستمر فرحة الغني لمدة طويلة، فسرعان ما أصبح يفكر، إن الضيف الغريب لم يكن بالمغفل وأن الصفقة معه ليست مربحة بقدر ما تراءى له في البداية. وبعد مضي 15 يوماً وجب عليه أن يدفع ثمناً للمائة ألف الجديدة ليس كوبيكات معدودات ولكن مئات الروبلات وزاد الدفع بشكل مخيف. وفعلاً فقد دفع الغني في النصف الثاني من الشهر:

عن المائة ألف الـ 15	163 روبلا و 84 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 16	327 روبلاً و68 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 17	655 روبلاً و36 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 18	1310 روبلات و72 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 19	2621 روبلاً و44 كوبيكاً

غير أن الغني اعتبر أنه لا يزال بعيداً عن الخسارة، على الرغم من أنه دفع ما يقرب من خمسة آلاف إلا أنه استلم 1800000 روبل.

ولكن المكسب صار يتضاءل يوماً بعد يوم بسرعة أكثر فأكثر.

ها هي المدفوعات التالية:

عن المائة ألف الـ 20	5242 روبلاً و88 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 21	10485 روبلاً و76 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 22	20971 روبلاً و52 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 23	41943 روبلاً و4 كوبيكات
عن المائة ألف الـ 24	83886 روبلاً و8 كوبيكات
عن المائة ألف الـ 25	167772 روبلاً و16 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 26	335544 روبلاً و32 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 27	671088 روبلاً و64 كوبيكاً

ووجب عليه أن يدفع أكثر مما استلم. وكان من الأفضل لو توقف ولكن لا يمكن الإخلال بالتعاقد.

بعد ذلك زادت الأحوال سوءاً. وتأكد المليونير ولكن بعد فوات الأوان أن هذا الرجل المجهول قد خدعه بقسوة، وأنه سيأخذ منه نقوداً أكثر بكثير مما سيدفع...

مع بداية اليوم الثامن والعشرين وجب على الغني أن يدفع بالملايين. أما اليومان الأخيران فقد أفلساه تماماً. ونورد أدناه المدفوعات الضخمة:

عن المائة ألف الـ 28	1342177 روبلاً و28 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 29	2684354 روبلاً و56 كوبيكاً
عن المائة ألف الـ 30	5368709 روبلاً و12 كوبيكاً

عندما غادره الضيف آخر مرة أخذ المليونير يحسب كم كلفته تلك الثلاثة ملايين روبل التي بدت رخيصة لأول وهلة. فاتضح أنه دفع لهذا المجهول:

10737418 روبلاً و23 كوبيكاً

أي 11 مليوناً تقريباً. وقد بدأت الحكاية من كوبيك واحد. كان الشخص المجهول يستطيع أن يقدم مبلغ ثلاثمائة ألف دون أن يخسر.

3) قبل أن ننهي هذه الرواية سأبين بأي طريقة يمكن التعجيل بعملية حساب خسارة المليونير. بتعبير آخر كيف يمكن بأسرع وقت إجراء عملية الجمع لمتسلسلة من الأعداد:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ... إلخ

من السهل ملاحظة الخاصية التالية لهذه الأعداد.

1 = 1

2 = 1 + 1

4 = (1 + 2) + 1

8 = (1 + 2 + 4) + 1

16 = (1 + 2 + 4 + 8) + 1

32 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 ... إلخ

نحن نرى أن كل عدد من هذه المتسلسلة يساوي كل الأعداد التي تسبقه مأخوذة معاً مع إضافة واحد صحيح. ولذلك فعندما يلزم جمع كل أعداد مثل هذه المتسلسلة مثلاً من 1 حتى 32768 فإننا

نجمع فقط إلى العدد الأخير (32768) مجموع كل الأعداد السابقة، وبتعبير آخر نضيف نفس العدد الأخير مع طرح واحد صحيح منه (32768 – 1) فنحصل على 65535.

بهذه الطريقة يمكن أن نحسب خسارة المليونير البخيل بسرعة كبيرة عندما نعرف المبلغ الذي دفعه في آخر مرة. علماً بأن آخر دفعة كانت 5368709 روبلات و12 كوبيكاً.

ولذلك فبجمع 5368709 روبلات و12 كوبيكاً مع 5368709 روبلات و11 كوبيكاً نحصل في الحال على النتيجة المطلوبة:

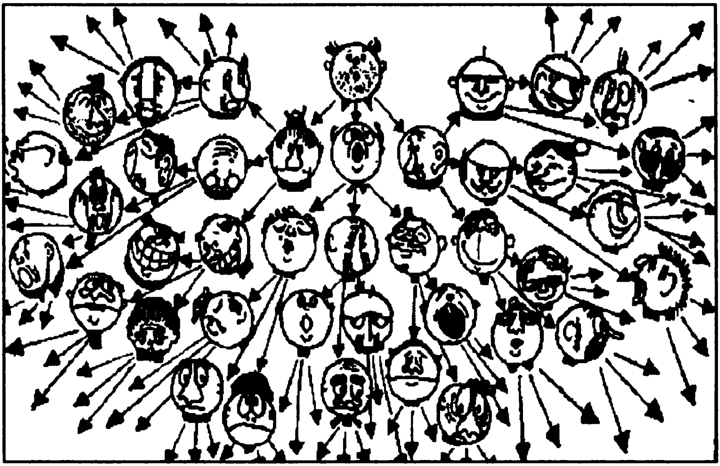
10737418 روبلاً و23 كوبيكاً

60- الإشاعات في المدينة. ما أعجب السرعة التي تنتشر بها الإشاعات في المدينة. ويحدث أحياناً أنه لا تمر ساعتان على وقت حدوث حدث ما رآه عدد بسيط من الناس فقط، بينما يكون الخبر قد اجتاح كل المدينة، والكل يعرفون عنه. والكل قد سمعوا به. وتبدو هذه السرعة غير العادية كأنها أمر مدهش، ويبعث على الحيرة تماماً.

ولكن إذا نظرنا للعملية من وجهة النظر الحسابية لأصبح من الواضح أنه لا يوجد هنا أي شيء مدهش: كل شيء يفسر بخصائص الأعداد، وليس بالخصائص الغامضة للإشاعات ذاتها.

ولنبحث الحادث التالي على سبيل المثال:

1) وصل في الساعة 8 صباحاً إلى مدينة صغيرة تقطنها 50 ألف نسمة أحد أبناء العاصمة، وجاء بخبر جديد يهم الكل.



شكل 51. طريق انتشار الإشاعة

فروى الخبر في البيت الذي توقف القادم فيه لثلاثة أفراد من السكان المحليين فقط. وأخذ هذا من الوقت ربع ساعة مثلاً.

وهكذا علم بالخبر في الساعة $8 \frac{1}{4}$ صباحاً أربعة فقط هم: القادم وثلاثة من سكان المدينة.

وبعد أن علم الثلاثة بالخبر أسرع كل منهم إلى إبلاغه لثلاثة آخرين. وقد تطلب ذلك ربع ساعة أيضاً. أي أنه بعد نصف ساعة من وصول الخبر إلى المدينة عرفه $4 + (3 \times 3) = 13$ شخصاً.

وقام كل من الـ 9 أشخاص من الذين عرفوا الخبر بإبلاغه في الربع ساعة التالية إلى 3 أشخاص آخرين، بحيث أنه أصبح معروفاً بحلول الساعة $8 \frac{3}{4}$ صباحاً !

$13 + (9 \times 3) = 40$ شخصاً

فإذا ما انتشرت الإشاعة بالمدينة بعد ذلك بنفس هذه الطريقة، أي أن كل من عرف الخبر استطاع في الربع ساعة التالية أن يرويه إلى ثلاثة من مواطنيه، فإن اطلاع المدينة على الخبر سيتم بالجدول التالي:

في الساعة 9 سيعرف الخبر $40 + (3 \times 27) = 121$ شخصاً

في الساعة $9\frac{1}{4}$ سيعرف الخبر $121 + (3 \times 81) = 364$ شخصاً

في الساعة $9\frac{1}{2}$ سيعرف الخبر $364 + (3 \times 243) = 1093$ شخصاً

بعد مضي ساعة ونصف بعد ظهور الخبر في المدينة لأول مرة سيعرفه، كما نرى، 1100 شخص فقط. وقد يبدو ذلك كما لو كان قليلاً بالنسبة للسكان البالغ عددهم 50000 شخص. ويجوز الاعتقاد أن الخبر لن يعرف بسرعة من قِبَل سكان المدينة جميعاً. فلنتتبع على أي حال انتشار الخبر في الساعات التالية: في الساعة $9\frac{3}{4}$ سيعرف الخبر $1093 + (3 \times 729) = 3280$ شخصاً في الساعة 10 سيعرف الخبر $3280 + (3 \times 2187) = 9841$ شخصاً.

وبعد مرور ربع ساعة سيعرف الخبر أكثر من نصف سكان المدينة:

$$9841 + (6561 \times 3) = 29524$$

وهذا يعني أنه قبل الساعة العاشرة والنصف صباحاً سيعرف كل سكان المدينة الخبر الذي كان يعرفه في الساعة 8 صباحاً شخص واحد فقط.

2) لنتتبع الآن كيف تم الحساب السابق.

لقد أدى في جوهر الأمر إلى أننا جمعنا متسلسلة أعداد كالآتية:

$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) + ...$ إلخ.

ولكن، ألا يمكن أن نعرف هذا المجموع بطريقة أقصر كما فعلنا سابقاً مع مجموع أعداد المتسلسلة 1 + 2 + 4 + 8...إلخ؟ هذا ممكن إذا أخذنا في الاعتبار الخاصية الآتية للأعداد التي نريد جمعها:

$1 = 1$

$1 + 2 \times 1 = 3$

$1 + 2 \times (3 + 1) = 9$

$1 + 2 \times (9 + 3 + 1) = 27$

$1 + 2 \times (27 + 9 + 3 + 1) = 81$ ...إلخ

بتعبير آخر: إن كل عدد من هذه المتسلسلة يساوي ضعف مجموع كل الأعداد السابقة زائد واحد صحيح.

من هنا ينبع أنه إذا وجب إيجاد مجموع كل أعداد المتسلسلة من الواحد حتى أي عدد فإنه يكفي أن نضيف إلى العدد النهائي نصفه (ويجب أن نحذف مسبقاً من العدد الأخير الواحد الصحيح).

فمثلاً مجموع الأعداد:

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$

يساوي 729 + نصف 728، أي 729 + 364 = 1093

3) في المثال السابق قام كل شخص في المدينة عرف الخبر بنقله إلى ثلاثة أشخاص فقط. ولكن إذا كان سكان المدينة ميالين إلى المحادثة أكثر وأخبر كل مواطن الخبر لا لثلاثة أشخاص ولكن، مثلاً، لـ 5 أو حتى لـ 10 أشخاص آخرين لانتشر الخبر بأسرع من ذلك بكثير.

مثلاً عند نقل الخبر إلى خمسة أشخاص تكون صورة اطلاع المدينة عليه كالآتي:

في الساعة 8		= شخص واحد
في الساعة $8\frac{1}{4}$	$5 + 1$	= 6 أشخاص
في الساعة $8\frac{1}{2}$	$(5 \times 5) + 6$	= 31 شخصاً
في الساعة $8\frac{3}{4}$	$(5 \times 25) + 31$	= 156 شخصاً
في الساعة 9	$(5 \times 125) + 156$	= 781 شخصاً
في الساعة $9\frac{1}{4}$	$(5 \times 625) + 781$	= 3906 أشخاص
في الساعة $\frac{1}{2}$	$(5 \times 3125) + 93906$	= 19531 شخصاً

وبذلك سيكون الخبر معروفاً لكل الـ 50 ألف شخص من سكان المدينة قبل الساعة $9\frac{3}{4}$ صباحاً

وتنتشر الإشاعة أسرع إذا ما نقل الخبر كل فرد سمعه إلى 10 أشخاص آخرين. عندئذ نحصل على متسلسلة طريفة وسريعة التصاعد للأعداد:

في الساعة 8		= 1
في الساعة $8\frac{1}{4}$	10 + 1	= 11
في الساعة $8\frac{1}{2}$	100 + 11	= 111
في الساعة $8\frac{3}{4}$	1000 + 111	= 1111
في الساعة 9	10000 + 1111	= 11111

إن العدد التالي في هذه المتوالية واضح وهو 111111. وهذا يدل على أن كل المدينة ستعرف الخبر في بداية الساعة العاشرة صباحاً. أي أن الإشاعة ستنتشر تقريباً بخلال ساعة.

61- سيل من الدراجات الرخيصة. في سني ما قبل الثورة كان في الاتحاد السوفييتي، ومن المحتمل أنه يوجد في البلدان الأخرى حتى الآن، تجار يستعملون طريقة خاصة لبيع مبيعاتهم، والتي تكون عادة من نوع سيء. وكانوا يعمدون أول الأمر إلى نشر إعلانات في الجرائد والمجلات الواسعة الانتشار ذات المحتوى التالي:

> دراجة مقابل 10 روبلات !
>
> كل فرد يمكنه أن يحصل على دراجة مقابل 10 روبلات فقط.
>
> انتهزوا الفرصة النادرة.
>
> 10 روبلات بدلاً من 50 روبلاً
>
> ترسل شروط الشراء بدون مقابل

وكان كثير من الناس ينجذبون للإعلان المغري، بالطبع، ويطلبون إرسال شروط الشراء العجيب. ورداً على الطلب كان يصلهم برنامج مفصل يعرفون منه الآتي:

تستلم مقابل الـ 10 روبلات لا الدراجة نفسها ولكن 4 تذاكر يلزم بيعها بسعر 10 روبلات للتذكرة إلى أربعة من المعارف. وبذلك فإن الأربعين روبلاً التي يحصل عليها بهذه الطريقة يجب أن ترسل للشركة، وعندئذ فقط تصل الدراجة. وهذا يعني أن المشتري يدفع في الواقع 10 روبلات أما الأربعين روبلاً الباقية فلا يدفعها من جيبه الخاص. حقاً إنه بالإضافة لدفع الـ 10 روبلات نقداً، كان يجب على المشتري أن يشغل نفسه ببيع التذاكر للمعارف، ولكن هذا العمل الصغير لم يدخل في الحساب.

إذن ماذا كانت هذه التذاكر؟ وما هي الميزات التي حصل عليها مشتري التذاكر مقابل الـ 10 روبلات؟ لقد حصل على حق أن يغير التذكرة الواحدة بخمس منها لدى الشركة، وبكلمات أخرى لقد حصل على إمكانية جمع 50 روبلاً لشراء الدراجة التي ساوت بالنسبة له فقط 10 روبلات، أي ثمن التذكرة. أما أصحاب التذاكر الجدد فقد حصلوا من الشركة أيضاً على 5 تذاكر لتوزيعها... إلخ.

من النظرة الأولى لم يبدو أن في الأمر أية خدعة. فقد نفذ ما وعد به الإعلان: إذ دفع المشترون عشرة روبلات فعلاً ثمناً للدراجة. ولم تخسر الشركة، فقد استلمت الثمن الكامل لسلعتها.

ولكن اللعبة كلها عبارة عن احتيال لا ريب فيه. إن «السيل» وهو اسم هذه الخدعة عندنا أو «الكرة الثلجية» كما سماها الفرنسيون،

كان يسلب نقود المشاركين الكثيرين في اللعبة الذين لم يستطيعوا بيع تذاكرهم التي اشتروها. لقد كانوا يدفعون للشركة الفرق ما بين الـ 50 روبلاً ثمناً للدراجة والـ 10 روبلات الثمن المدفوع للدراجة. وعاجلاً أو آجلاً كان لا بد وأن تحل اللحظة التي يعجز فيها أصحاب التذاكر عن إيجاد الراغبين في اقتنائها. كان هذا لا بد وأن يحدث، وستفهم ذلك، لو أنك أجهدت نفسك في أن تتبع بواسطة القلم كيف يزداد بسرعة عدد الناس المنجرفين إلى السيل.

إن أول مجموعة من المشتركين التي حصلت على تذاكرها من الشركة تجد المشترين عادة بدون جهد كبير، فكل واحد من هؤلاء يعطي تذاكر لأربعة مشتركين جدد.

أما هؤلاء الأربعة فلا بد وأن يبيعوا تذاكرهم لـ 4 × 5 أي لـ 20 شخصاً آخر، بإقناعهم بفائدة شراء هذه التذاكر. فلنفرض أنه تسنى لهم ذلك، وكسبوا 20 مشترياً.

يواصل السيل تقدمه: ويجب على الـ 20 مشترياً الجدد الحاصلين على التذاكر أن يوزعوا تذاكرهم على 20 × 5 = 100 شخص آخرين.

وحتى الآن فإن كل واحد ممن ابتدأ السيل قد جرّ إلى اللعبة:

1 + 4 + 20 + 100 = 125 شخصاً

حصل 25 شخصاً منهم على دراجات، أما الـ 100 فيحدوهم الأمل في الحصول عليها شرط أن يدفعوا مقابل هذا الأمل 10 روبلات.

والآن يخرج السيل من المحيط الضيق للمعارف ويبدأ جريانه في كل المدينة حيث تزداد الصعوبة في إيجاد مادة جديدة. ويجب على المائة شخص الأخيرين الحائزين على التذاكر أن يبيعوها لـ 500 شخص من المواطنين، وينبغي على هؤلاء أن يجدوا 2500 ضحية جديدة. وتمتلئ المدينة بسرعة بفيضان التذاكر، وتصبح عملية إيجاد راغبين بشراء التذاكر عملية صعبة جداً.

يرى القارئ أن عدد الناس الذين انجروا إلى السيل يتنامى بنفس القانون الذي تحدثنا عنه عندما تكلمنا عن انتشار الإشاعات. وها هو الهرم العددي الذي يتكون في هذه الحالة:

1
4
20
100
500
2500
12500
62500

إذا كانت المدينة كبيرة وبلغ عدد كافة السكان القادرين على قيادة الدراجة 62500 شخص فإنه في اللحظة قيد البحث أي في الدورة الثامنة لا بد وأن ينتهي السيل. وبذلك يكون الجميع قد انجرفوا إلى السيل. بينما لم يحصل على دراجات سوى خمس عدد السكان الـ $\frac{4}{5}$ الآخرون فيمتلكون تذاكر.

أما بالنسبة لمدينة أكبر من حيث عدد السكان، حتى بالنسبة للعاصمة تضم ملايين السكان، فإن لحظة التشبع تحدث بعد مضي

عدة دورات فقط، لأن الأعداد في السيل تزداد بسرعة غير معقولة. ونورد أدناه طوابق الهرم العددي الذي بيّناه:

312500
1562500
7812500
39062500

ففي الدورة الثانية عشرة يمكن أن يجرف السيل سكان دولة كاملة. وسيخدع القائمون به $\frac{4}{5}$ السكان.

ولكن ما الذي تحصل عليه الشركة من إجراء هذا السيل. إنها تجبر $\frac{4}{5}$ السكان على أن يدفعوا ثمن السلعة التي يحصل عليها $\frac{1}{5}$ السكان الباقين. وبتعبير آخر إنها تجبر كل أربعة مواطنين على أن يساعدوا الخامس. بالإضافة إلى ذلك تحصل الشركة بدون مقابل تماماً على عدد كبير من موزعي سلعتها الدؤوبين. لقد وصف أحد الكُتّاب هذه العملية بحق بأنها «سيل من النصب المتبادل». إن العملاق العددي الذي يختفي وراء هذه العملية يعاقب هؤلاء الذين لا يستطيعون استخدام الحساب لحماية مصالحهم الشخصية من تطاول المحتالين.

62- مكافأة. إليكم ما حدث منذ عدة قرون مضت في روما القديمة(*).

(*) القصة مأخوذة من مخطوطة لاتينية قديمة موجودة في أحد خزائن الكتب الخاصة في إنكلترا.

1) قام القائد تيرينسي، تنفيذاً لأمر الإمبراطور، بحملة مظفرة وعاد إلى روما محملاً بالغنائم. وعندما وصل إلى روما طلب مقابلة الإمبراطور. فقابله الإمبراطور ببشاشة، وشكره بحرارة على خدماته العسكرية للإمبراطورية ووعده بمكافأة هي أن يمنحه منزلة رفيعة في مجلس الشيوخ.

ولكن تيرينسي لم يكن يريد ذلك. فعارضه قائلاً:

- لقد حققت كثيراً من الانتصارات، لكي أزيد من جبروتك، يا مولاي، ولكي أحيط اسمك بهالة المجد. ولم أهاب الموت، ولو كانت لدي لا حياة واحدة ولكن عدة حيوات لضحيت بها من أجلك. ولكني قد تعبت من القتال، وولى الشباب وأصبح الدم يسيل في عروقي بصورة أبطأ. لقد حان الحين لكي أستريح في بيت أجدادي ولكي أستمتع بمسرات الحياة المنزلية.

فسأل الإمبراطور:

- وماذا تطلب مني يا تيرينسي؟

- اسمعني متسامحاً، يا مولاي! فخلال سنوات حياتي الطويلة في الحرب، كنت ألطخ سيفي بالدم من يوم لآخر، ولم تسنح لي الفرصة لكي أدبر لنفسي بعض المال. إنني فقير يا مولاي...

- أكمل يا تيرينسي الشجاع.

واستطرد القائد يقول متشجعاً:

- لو أنك تريد أن تكافئ خادمك المتواضع، فليساعدني كرمك على أن أعيش بقية حياتي في سلام وفي بسطة من العيش في

ثنايا العش المنزلي. إنني لا أبحث عن مراسيم التكريم ولا المكانة الرفيعة في مجلس الشيوخ الجبار. إنني أتمنى الابتعاد عن السلطة وعن الحياة العامة لكي أستريح في هدوء. مولاي، أعطني مالاً لكي أضمن بقية حياتي.

وتقول الأسطورة أن الإمبراطور لم يكن معروفاً بكرمه الواسع وكان يحب أن يدخر الأموال لنفسه، وما كان ينفقها على الآخرين بسخاء. ولقد اضطره طلب القائد إلى أن يفكر.

فسأل القائد:

- أي مبلغ يا تيرينسي تعتبره أنت كافياً لك؟

- مليون دينار، يا مولاي.

ومرة أخرى استغرق الإمبراطور في التفكير. بينما أطرق القائد رأسه انتظاراً. وأخيراً تكلم الإمبراطور فقال:

- أيها المغوار تيرينسي! أنت محارب عظيم، وانتصاراتك العظيمة أهلتك لمكافأة شخصية. سأمنحك الثروة. غداً في منتصف النهار ستسمع هنا قراري.

فسجد تيرينسي وخرج.

2) في اليوم التالي، وفي الموعد المحدد جاء القائد إلى قصر الإمبراطور.

فقال الإمبراطور:

- سلام عليك يا تيرينسي الشجاع!

وأخفض تيرينسي رأسه بخشوع:

- لقد أتيت يا مولاي لكي أسمع قرارك. لقد وعدت عطفاً منك أن تكافئني.

أجاب الإمبراطور:

- لا أريد أن يأخذ محارب عظيم مثلك مكافأة زهيدة مقابل أعماله العظيمة. فلتسمعني حتى النهاية. توجد في خزينتي 5 ملايين براسا(*) نحاسياً. والآن اسمع ما أقوله بانتباه. ستدخل إلى الخزينة وتأخذ قطعة واحدة في يدك وتعود إلى هنا وتضعها عند قدمي. وفي اليوم التالي ستذهب مرة أخرى إلى الخزينة وتأخذ قطعة نقود تساوي براسين اثنين وتضعها هنا بجانب الأولى. ففي اليوم الثالث ستحضر قطعة نقود تساوي 4 براسات وفي الرابع -قطعة تساوي 8 براسات في الخامس- 16 براسا وهكذا في كل مرة تضاعف ثمن قطعة النقود. وسآمر كل يوم بأن تصنع لك قطع من النقود بالثمن المناسب. وستخرج من خزينتي القطع النقدية ما دامت لديك من القوة في أن ترفعها. ولا يملك أحد الحق في أن يساعدك. إذ يجب أن تستعمل قوتك الذاتية فقط. وعندما ستلحظ أنك لا تستطيع أن ترفع القطعة النقدية أكثر توقف، فاتفاقنا سينتهي، ولكن كل القطع التي تمكنت من إخراجها ستكون لك، وستكون هي مكافأتك.

استمع تيرينسي إلى كل كلمة قالها الإمبراطور.

(*) قطعة نقود صغيرة تساوي $\frac{1}{5}$ الدينار.

وتراءى له العدد الهائل من القطع النقدية، وكل واحدة أكبر من الأخرى، والتي سيخرجها من خزينة الدولة.

فأجاب بابتسامة ابتهاج:

- أنا راضٍ بعطفك يا مولاي، إن مكافأتك سخية حقاً!

3) ابتدأت زيارات تيرينسي اليومية لخزينة الدولة. وكانت الخزينة قريبة من قاعة الاستقبال للإمبراطور، ولم يبذل القائد جهداً يُذكر في أول انتقالاته مع القطع النقدية. فأخرج من الخزينة في اليوم الأول براسا واحداً فقط. وهي قطعة نقدية ليست بالكبيرة يبلغ قطره 21 مم ووزنها 5 جم.

وكان سهلاً أيضاً الانتقال الثاني والثالث والرابع والخامس والسادس عندما أخرج القائد قطعاً نقدية ثنائية الوزن ورباعية الوزن، و8 أضعاف الوزن و 16 ضعف الوزن و 32 ضعف الوزن.

وكانت القطعة النقدية السابعة تزن بقيم موازيننا الحديثة 320 جم ويبلغ قطرها $\frac{1}{2}$ 8 سم (وبحساب أدق 85 مم)(*).

في اليوم الثامن اضطر تيرينسي أن يحمل من الخزينة قطعة نقدية تقابل 128 وحدة من وحدات القطع النقدية. وكان وزنها يساوي 640جم وقطرها $\frac{1}{2}$10سم تقريباً.

(*) لو أن القطعة النقدية كانت أكبر من العادية بـ 64 مرة لكانت أوسع وأسمك منها بـ 4 مرات فقط ولذلك فإن 4 × 4 × 4 = 64. يجب أخذ هذا في الاعتبار في المستقبل عند حساب مقاييس القطع النقدية التي يجري الحديث عنها في القصة.

وفي اليوم التاسع أحضر تيرينسي إلى القاعة الإمبراطورية قطعة نقدية تقابل 256 وحدة من وحدات القطع النقدية. وكان قطرها يساوي 13 سم وتزن أكثر من $1\frac{1}{4}$ كجم.

وفي اليوم الثاني عشر بلغ قطر القطعة النقدية 27 سم ووزنها $10\frac{1}{4}$ كجم.

وكان الإمبراطور حتى الآن ينظر بإعجاب إلى القائد، ولم يخف الآن ابتهاجه. لقد رأى أن القائد قام بـ 12 انتقالة وأخرج من الخزينة 2000 ونيف من القطع النقدية فقط.

في اليوم الثالث عشر حمل تيرينسي الشجاع قطعة نقدية تعادل 4096 وحدة وبلغ قطرها 34 سم تقريباً ووزنها $20\frac{1}{2}$ كجم.

وفي اليوم الرابع عشر أخرج تيرينسي من الخزينة قطعة نقدية وزنها 41 كجم وقطرها حوالي 42 سم.

سأله الإمبراطور وهو يغالب الابتسام:

- ألم تتعب يا شجاعي تيرينسي؟

أجاب القائد وهو يمسح العرق عن جبهته:

- لا يا مولاي.

وجاء اليوم الخامس عشر. وكان حمل تيرينسي في هذا اليوم ثقيلاً. وتقدم ببطء إلى الإمبراطور حاملاً القطعة النقدية التي تعادل 16384 وحدة نقدية. وبلغ قطرها 53 سم ووزنها 80 كجم، وهو وزن محارب ضخم.

شكل 52. القطع النقدية السابعة عشرة

وفي اليوم السادس عشر صار القائد يتأرجح تحت وطأة الحمل الذي كان على ظهره. وكان ذلك الحمل قطعة نقدية تعادل 32768 وحدة نقدية ووزنها 164 كجم ووصل قطرها إلى 67 سم.

كان القائد خائر القوى ويتنفس بصعوبة. وابتسم الإمبراطور...

عندما ظهر تيرينسي في قاعة الاستقبال للإمبراطور في اليوم التالي قوبل بضحك عالٍ. لم يعد تيرينسي يستطيع أن يحمل حمله بيديه بل كان يدحرجه أمامه. وكان قطر القطعة النقدية 84 سم ووزنها 328 كجم. وكان وزنها يعادل وزن 65536 من وحدات القطع النقدية.

كان اليوم الثامن عشر آخر يوم لثراء تيرينسي. وفي هذا اليوم انتهت زياراته للخزينة ومسيرته مع الحمولات إلى قاعة الاستقبال للإمبراطور. فقد وجب عليه في هذه المرة أن يجلب قطعة نقدية

تعادل 131072 من الوحدات النقدية يزيد قطرها على المتر ووزنها 655 كجم. واستخدم القائد رمحه كرافعة وبالكاد دحرجها إلى القاعة وبذل في ذلك جهداً عظيماً. فوقعت القطعة النقدية العملاقة عند أقدام الإمبراطور محدثة هديراً.

وكان تيرينسي مجهداً تماماً.

وهمس قائلاً:

- لا أستطيع أكثر... يكفي.

وكتم الإمبراطور بصعوبة ضحكة الارتياح لمرأى حيلته وقد تكللت بالنجاح التام. وأمر بأن يحسب الخازن كم أخرج تيرينسي من البراسات إلى قاعة الاستقبال.

قام الخازن بتنفيذ الأمر وقال:

- أيها الحاكم نظراً لكرمك فإن المقاتل الظافر تيرينسي أخذ كمكافأة 262143 براسا.

وهكذا أعطى الإمبراطور البخيل للقائد حوالي $\frac{1}{20}$ من مبلغ المليون دينار الذي طلبه تيرينسي.

* * *

فلنراجع حساب الخازن وفي نفس الوقت وزن القطع النقدية. لقد أخرج تيرينسي ما يلي:

في اليوم الأول: براس واحد وزنه 5 جم

في اليوم الثاني: براسان اثنان وزنهما 10 جم

في اليوم الثالث: 4 براسات وزنها 20 جم

في اليوم الرابع: 8 براسات وزنها 40 جم

في اليوم الخامس: 16 براسا وزنها 80 جم

في اليوم السادس: 32 براسا وزنها 160 جم

في اليوم السابع: 64 براسا وزنها 320 جم

في اليوم الثامن: 128 براسا وزنها 640 جم

في اليوم التاسع: 256 براسا وزنها 1 كجم 280 جم

في اليوم العاشر: 512 براسا وزنها 2 كجم 560 جم

في اليوم الحادي عشر: 1024 براسا وزنها 5 كجم 120 جم

في اليوم الثاني عشر: 2048 براسا وزنها 10 كجم 240 جم

في اليوم الثالث عشر: 4096 براسا وزنها 20 كجم 480 جم

في اليوم الرابع عشر: 8192 براسا وزنها 40 كجم 960 جم

في اليوم الخامس عشر: 16384 براسا وزنها 81 كجم 920 جم

في اليوم السادس عشر: 32769 براسا وزنها 163 كجم 840 جم

في اليوم السابع عشر: 65536 براسا وزنها 327 كجم 680 جم

في اليوم الثامن عشر: 131072 براسا وزنها 655 كجم 360 جم

نحن نعرف كيف يمكن ببساطة حساب مجموع أعداد مثل هذه المتسلسلات: للعمود الثاني يساوي 262143. طلب تيرينسي

من الإمبراطور مليون دينار أي 5000000 براس وهذا يعني أنه قد حصل على أقل مما طلب بمقدار:

5000000 ÷ 262143 ≈ 19 مرة

63- أسطورة عن لوحة الشطرنج. لعبة الشطرنج واحدة من أقدم الألعاب. وهي توجد منذ عدة قرون وليس من المستغرب أنه ترتبط بها أساطير كثيرة لا يمكن اختبار صحتها نظراً لأنها كانت في قديم الزمان.

وأريد الآن رواية إحدى هذه الأساطير. لكي نتفهمها لا يلزم بتاتاً أن تعرف لعبة الشطرنج، ويكفي أن تعرف أن اللعبة تتم على لوحة مقسمة إلى 64 مربعاً (سوداء وبيضاء على التوالي).

1) تم ابتكار لعبة الشطرنج في الهند وعندما تعرف الملك الهندي شيرام عليها اندهش لذكائها واختلاف الأوضاع الممكنة فيها.

وعندما علم الملك أن مخترعها من رعاياه أمر بإحضاره إليه لكي يكافئه شخصياً على فكرته الموفقة.

حضر المخترع، وكان اسمه سيتا، إلى عرش الملك. لقد كان عالِماً بسيط الملبس ويكسب قوته بتعليم تلاميذه.

وقال الملك:

- إنني أريد أن أكافئك يا سيتا على هذه اللعبة العظيمة التي اخترعتها.

وخرّ الحكيم ساجداً.

وأضاف الملك يقول:

- إنني غني بما فيه الكفاية لكي أنفذ أشجع رغبة لديك. قل المكافأة التي ترضيك وستحصل عليها.

ولزم سيتا الصمت.

فشجعه القيصر قائلاً:

- لا تخجل، اذكر رغبتك. لن أضن بشيء لكي أحققها لك.

- إن كرمك عظيم أيها الملك. ولكن أعطني مهلة لأفكر في الإجابة. غداً سأخبرك، بعد أن يختمر تفكيري، برغبتي.

عندما جاء سيتا في اليوم الثاني إلى مدرجات العرش ثانية، أدهش القيصر بتواضع طلبه.

قال سيتا:

- أيها الملك، آمر أن تعطي لي من أجل أول مربع من لوحة الشطرنج حبة قمح.

فدهش الملك وقال:

- حبة قمح عادية؟

- نعم أيها الملك. وعن المربع الثاني آمر بإعطائي حبتين، وعن الثالث 4 حبات وعن الرابع 8 حبات وعن الخامس 16 حبة وعن السادس 32 حبة...

وقاطعه القيصر متضايقاً:

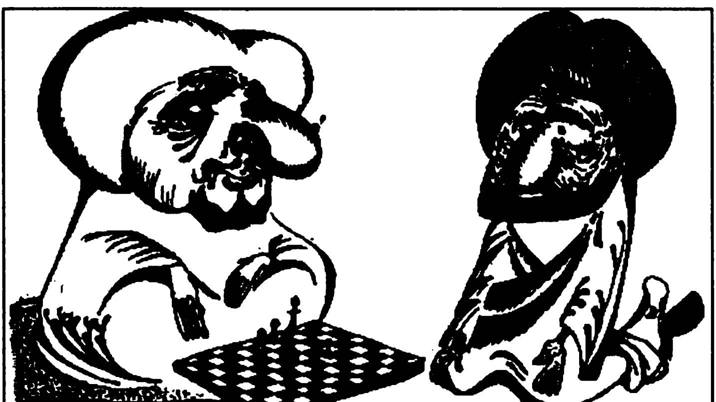
– يكفي، ستأخذ الحبات عن جميع الـ 64 مربعاً للوحة تبعاً لرغبتك، عن كل مربع بمقدار ضعف ما أخذته عن المربع السابق. ولكن اعلم أن رغبتك هذه غير جديرة بكرمي. إنك بطلبك مثل هذه المكافأة التافهة تتجاهل كرمي بما ينم عن عدم الاحترام. والواقع إنك كمعلم، كان الأوْلى بك أن تكون قدوة حسنة في احترام كرمك ملكك. اذهب. وسيحمل لك خدمي كيس القمح.

وابتسم سيتا وخرج من القاعة، وأخذ ينتظر عند بوابة القصر.

2) تذكر الملك أثناء الغداء مخترع الشطرنج، وبعث يسأل هل أخذ سيتا الطائش مكافأته البائسة أم لا.

وكانت الإجابة:

– أيها الملك، أمرك ينفذ. ويقوم رياضيو القصر بحساب عدد الحبوب اللازمة.



شكل 53. «مقابل المربع الثاني آمر بإعطائي حبتين».

وعبس الملك. إنه لم يتعود أن تنفَّذ أوامره بهذا البطء. وفي المساء سأل الملك عند انصرافه للنوم هل منذ زمن بعيد ترك سيتا باحة القصر مع كيسه من القمح. فأجابوه:

– أيها الملك، إن رياضييك يعملون بدون كلل، وهم يأملون أن ينتهوا من العمل قبل الفجر.

فسأل الملك بغضب:

– لماذا يبطئون في عمل هذا؟ لا بد أن يعطى لسيتا غداً قبل أن أستيقظ كل شيء حتى آخر حبة.

إنني لا أعيد إصدار أوامري.

وفي الصباح قيل للملك إن كبير رياضيي القصر يرجو منه سماع شيء هام؟

فأمر الملك بإدخاله.

قال شيرام:

– قبل أن تقول ما تريد إنني أريد أن أسمع هل أعطيت في نهاية الأمر لسيتا تلك المكافأة التافهة التي طلبها.

فأجابه الشيخ قائلاً:

– من أجل ذلك تجرأت بالمثول بين يديك في مثل هذه الساعة المبكرة. لقد حسبنا بإمعان كل عدد الحبوب التي يريد أن يحصل عليها سيتا. وإن هذا العدد لضخم...

فقاطعه الملك بغطرسة قائلاً:

– مهما كان العدد ضخماً. فلن تفتقر خزائني. لا بد وأن تسلم المكافأة التي وعدت بها...

– ليس في سلطتك أيها الملك تنفيذ مثل هذه الرغبات. ففي كل خزائنك لا يوجد هذا العدد من الحبوب الذي طلبه سيتا. فلا يوجد مثل هذا العدد في كل خزائن المملكة، ولن يوجد في كل الأرض. ولو أردت أن تعطيه المكافأة الموعودة فلتأمر بأن تتحول ممالك الأرض إلى أرض للحرث، وأن تجفف البحار والمحيطات، وأن يزال الجليد والثلوج التي تغطي الصحاري الشمالية. فليكن كل ما فيها من أرض مزروعاً بالقمح. وامر بأن يعطى كل ما سينتج من هذه الحقول لسيتا. عندئذ سيأخذ مكافأته.

واستمع الملك بدهشة إلى كلمات الشيخ.

وقال وهو غارق في التفكير:

– اذكر لي هذا العدد العجيب.

– ثمانية عشر **كوينتليوناً** وأربعمائة وستة وأربعون **كوادرليوناً** وسبعمائة وأربعة وأربعون **تريليوناً** وسبعمائة وثلاثة **بليوناً** وسبعمائة وتسعة **ملايين** وخمسمائة وواحد وخمسون **ألف** وستمائة وخمس عشرة حبة، يا مولاي!

3) هذه هي الأسطورة. ولا يعرف فيما إذا كان ما ورد هنا حقيقة واقعة، ولكن المكافأة التي تتحدث عنها الأسطورة كان لا بد أن يعبر عنها بهذا الرقم فعلاً. ويمكن أن تتأكد من ذلك بنفسك إذا قمت بالحساب بصبر.

إذا ابتدأنا بالواحد الصحيح فيلزمنا جمع الأعداد 1، 2، 4، 8...إلخ. وتبين نتيجة الـ 63 مضاعفة كم يكون للمخترع مقابل المربع الرابع والستين في اللوحة. بالعمل كما هو مبين على 821 نجد بدون مجهود مجموع كل الحبوب قيد البحث إذا ما ضاعفنا العدد الأخير وطرحنا منه الواحد الصحيح. وهذا يعني أن كل الحساب يتركز في ضرب الرقم اثنين 64 مرة:

2 × 2 × 2 × 2 × 6...إلخ (64 مرة)

لكي نسهل العملية سنقسم هذه الـ 64 حداً للضرب إلى 6 مجموعات يكرر الرقم اثنين في كل منها 10 مرات وتكون المجموعة الأخيرة مؤلفة من 4 اثنانات. من السهل التأكد أن حاصل ضرب 10 اثنانات يساوي 1024، والـ 4 اثنانات يساوي 16. هذا يعني أن النتيجة تساوي:

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16$$

بضرب 1024 × 1024 نحصل على 1048576

والآن يبقى أن نوجد:

$$1048576 \times 1048576 \times 1048576 \times 16$$

ونطرح من النتيجة الواحد الصحيح، فنحصل على العدد المطلوب من الحبوب:

18446744073709551615

لو أردت أن تتخيل ضخامة هذا العملاق العددي، فلتحسب حجم مخزن الحبوب اللازم لاستيعاب مثل تلك الكمية

من الحبوب. علماً بأن المتر المكعب من القمح يحتوي على ما يقرب من 15 مليون حبة. وهذا يعني أن مكافأة مخترع الشطرنج يجب أن تشغل مكاناً يبلغ حجمه 12000000000000 متر مكعب أو 12000 كيلومتر مكعب. وإذا كان ارتفاع المخزن 4 م وعرضه 10 م لوجب أن يمتد لمسافة 300000000 كيلومتر، أي أكبر بمرتين من المسافة من الأرض إلى الشمس.

ولم يكن الملك الهندي ليستطيع أن يقدم مثل هذه المكافأة. ولكنه كان يستطيع لو كان قوياً في الرياضيات أن يتحرر من مثل هذا الدَّيْن الثقيل. من أجل ذلك كان يجب فقط أن يقترح على سيتا أن يحسب بنفسه حبة حبة كل نصيبه من القمح.

وفعلاً، فلو أخذ سيتا على عاتقه عملية الحساب وقام بها ليلاً ونهاراً بدون راحة على أن يعد حبة كل ثانية فإنه في اليوم الأول كان سيعد 86400، ولكي يحسب مليون حبة كان يلزمه ما لا يقل عن 10 أيام من الحساب المستمر، وكان سيحسب المتر المكعب الواحد من الحبوب في نصف عام، وهذا كان يعطيه 5 أرباع فقط. وإذا كان قد قام بالعد بدون راحة خلال 10 سنوات لحسب ما لا يزيد عن 100 ربع. وأنت ترى أنه حتى لو مكث بقية عمره يحسب فإنه كان سيحصل على جزء ضئيل من المكافأة التي طلبها لنفسه.

64- التكاثر السريع. رأس ثمرة خشخاش مليئة بالبذور الصغيرة: يمكن من كل حبة أن ينمو نبات كامل. كم عدد رؤوس ثمار الخشخاش التي سنحصل عليها إذا نبتت كل الحبوب؟ لمعرفة ذلك يلزم أن نعد عدد البذور في الرأس الكاملة. إنها عملية مملة،

ولكن النتيجة مثيرة جداً بحيث تستأهل أن نصبر ونقوم بالعد حتى النهاية. يتضح أن رأساً واحدة من الخشخاش تحتوي على 3000 حبة تقريباً.

وماذا يعني هذا؟ يعني أنه إذا كان حول نبات الخشخاش مساحة كافية من الأرض الجيدة فإنه يمكن أن ينمو النبات من كل حبة تقع، وفي الصيف التالي سينبت في نفس هذا المكان 3000 نبات خشخاش أي حقل كامل منه، وذلك من رأس واحدة.

فلننظر ماذا بعد ذلك. إن كل نبتة واحدة من 3000 نبات ستنبت ما لا يقل عن رأس واحدة (الأغلب أن تكون هناك عدة رؤوس) وفي كل رأس 3000 حبة. بنموه فإن بذور الرأس الواحد تعطي 3000 من النباتات الجديدة. وبالتالي سيكون لدينا في السنة الثانية ما لا يقل عن :

$3000 \times 3000 = 9000000$ نبات

ومن السهل حساب أنه في السنة الثالثة سيصل عدد سلالة راس الخشخاش الواحد الذي كان لدينا أولاً إلى:

$$9000000 \times 3000 = 27000000000$$

وفي السنة الرابعة:

$$27000000000 \times 3000 = 81000000000000$$

وفي السنة الخامسة ستضيق الكرة الأرضية بهذه النباتات لأن عددها سيكون:

$$81000000000000 \times 3000 = 243000000000000000$$

فإن سطح كل اليابسة من الأرض، أي مساحة كل القارات والجزر على الكرة الأرضية، يبلغ 135 مليون كيلومتر مربع فقط أي 135000000000000 م^2 وتقريباً في 2000 مرة أقل من عدد نباتات الخشخاش التي نبتت.

وأنتم ترون أنه إذا نبتت كل حبات الخشخاش فإن سلالة نبات واحد كانت تستطيع خلال خمسة أعوام أن تغطي كل اليابسة بنباتات كثيفة في حدود ألفي نبات في كل متر مربع، ها هو ذي العملاق العددي الذي يكمن في بذرة الخشخاش الصغيرة.

لو أجرينا نفس الحساب على نبات آخر غير الخشخاش ذي بذور أقل في العدد لوصلنا إلى نتيجة مشابهة، ولكن سلالته كان ستغطي الأرض لا خلال خمس سنوات ولكن في وقت أطول بقليل. فلنأخذ على سبيل المثال نبات الهندباء البرية الذي يعطي كل سنة ما يقارب من 100 بذرة(*). فلو أنها نبتت كلها لحصلنا على:

في السنة الأولى:	نبات واحد
في السنة الثانية:	100 نبات
في السنة الثالثة:	10000 نبات
في السنة الرابعة:	1000000 نبات
في السنة الخامسة:	100000000 نبات
في السنة السادسة:	10000000000 نبات

(*) في أحد رؤوس الهندباء البرية وجد حتى 200 بذرة.

في السنة السابعة: 1000000000000 نبات

في السنة الثامنة: 100000000000000 نبات

في السنة التاسعة: 10000000000000000 نبات

وهذا يزيد بـ 70 مرة على ما هو موجود من الأمتار المربعة على كل اليابسة.

وبالتالي ففي العام التاسع كان نبات الهندباء البرية (سن الأسد) سيغطي الأرض بمعدل 70 نباتاً في كل متر مربع.

لماذا لا نلاحظ في الواقع مثل هذا التكاثر السريع؟ لأن الأكثرية العظمى من البذور تموت دون أن تعطي نباتات صغيرة: فهي إما لا تقع على أرض صالحة وبالتالي لا تنمو أبداً، أو أنها عندما تبدأ النمو تطغى عليها نباتات أخرى أو أخيراً تدوسها الحيوانات. ولكن لو لم يحدث هذا الإفناء الجماعي للبذور والنباتات الصغيرة لغطى كل نبات كوكبنا بأجمعه في زمن قصير.

ولا يصح هذا بالنسبة للنباتات فقط ولكن بالنسبة للحيوانات أيضاً. فلولا الموت لغطت كل الأرض سلالة زوج واحد من أي من الحيوانات عاجلاً أو آجلاً. إن جحافل الجراد التي تغطي مساحة واسعة من الأرض يمكن أن تعطي لنا صورة عما يمكن أن يحدث لو لم يعرقل الموت تكاثر الكائنات الحية. لتغطت القارات خلال ثلاثين أو أربعين سنة بغابات كثيفة وبراري تعج بملايين الحيوانات التي تتصارع فيما بينها من أجل المكان، ولامتلأ المحيط بالسمك بكثافة بحيث يصبح مرور السفن أمراً مستحيلاً. ولأصبح الهواء غير شفاف من كثرة الطيور والحشرات. فلننظر

كمثال، كيف تتكاثر الذبابة المعروفة للجميع. فلنفرض أن كل ذبابة تضع 120 بيضة ولنفرض أنه خلال الصيف تلحق 7 أجيال من الذباب في الظهور نصفها إناث. ولنفترض أن أول وضع كان في 15 إبريل وسنحسب أن الذبابة الأنثى تكبر خلال 20 يوماً لدرجة أنه نفسها تضع البيض. عند ذلك يتم التكاثر كالآتي:

في 15 إبريل: وضعت الأنثى 120 بيضة، وفي بداية مايو تفقست 120 ذبابة، منها 60 أنثى.

في 5 مايو: وضعت كل أنثى 120 بيضة، وفي منتصف مايو تفقست 60 × 120 = 7200 ذبابة، منها 3600 أنثى.

في 25 مايو: كل واحدة من 3600 أنثى وضعت 120 بيضة، وفي بداية يونيو تفقست 3600 × 120 = 432000 ذبابة، منها 216000 أنثى.

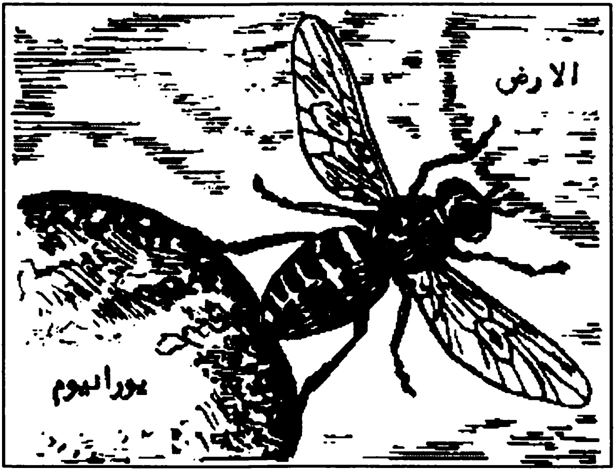
في 14 يونيو كل أنثى من الـ 216000 أنثى وضعت 120 بيضة، وفي نهاية يونيو تفقست 25920000 ذبابة منها 12960000 أنثى.

في 5 يوليو: تضع كل واحدة من 12960000 أنثى 120 بيضة، وفي يوليو تفقست 1555200000 ذبابة منها 777600000 أنثى.

في 25 يوليو: تفقست 93312000000 ذبابة منها 46656000000 أنثى.

في 13 أغسطس: تفقست 5598720000000 ذبابة منها 2799360000000 أنثى.

في أول سبتمبر: تفقست 335923200000000 أنثى.



شكل 54. كان يمكن أن يوضع نسل الذبابة خلال صيف واحد في خط من الأرض حتى الكوكب يورانيوم.

لكي نتخيل بصورة أوضح هذه الكتلة الضخمة من الذباب التي كانت تستطيع أن تولد خلال صيف واحد عند التكاثر غير المعاق لزوج واحد، ولنتخيل أنها وقفت في خط مستقيم كل واحدة بجانب الأخرى، بما أن طول الذباب 5 مم فإن كل هذا الذباب كان سيمتد على طول 2500 مليون كيلومتر، أي بمقدار يزيد 18 مرة على المسافة من الأرض حتى الشمس (أي ما يقرب من المسافة من الأرض حتى كوكب يورانيوم البعيد)...

في الختام سنورد بعض الحالات الحقيقية للتكاثر السريع الخارق للمألوف للحيوانات التي بدا العيش في ظروف مناسبة.

لم تكن في أمريكا عصافير في البداية. فقد جلب هذا الطائر المألوف لدينا إلى الولايات المتحدة عمداً بهدف القضاء على

الحشرات الضارة. والعصفور، كما هو معروف، يأكل كثيراً من الأساريع الأكولة والحشرات الأخرى التي تضر الحدائق والبساتين. وألفت العصافير الظروف الجديدة: فلم يكن في أمريكا كواسر تهلك هذه الطيور وأصبح العصفور يتكاثر بسرعة. وبدأت كمية الحشرات الضارة تقل بشكل ملحوظ ولكن سرعان ما تكاثرت العصافير ولقلة الطعام الحيواني أخذت تأكل النباتات وأصبحت تخرب الزرع(*). وبرزت الحاجة لمكافحة العصافير، ولقد كلفت هذه المكافحة الأمريكيين غالياً لدرجة أنه صدر للمستقبل قانون يمنع إدخال أي حيوانات إلى أمريكا.

المثال الثاني. لم تعرف الأرانب في استراليا عندما اكتشف الأوروبيون هذه القارة وأدخل الأرنب إلى هناك في نهاية القرن الثامن عشر. وبما أنه لم تكن هناك وحوش تتغذى على الأرانب فقد تم تكاثر هذه القوارض بوتائر سريعة للغاية. وسرعان ما فاض جيش الأرانب الضخم على كل استراليا وأحدث أضراراً كبيرة على الزراعة وتحول إلى كارثة حقيقية. وقد وجهت أموال طائلة لمكافحة الآفة الزراعية هذه وأمكن بفضل التدابير النشطة فقط التغلب على هذه الكارثة. وتكرر نفس الشيء تقريباً بعد ذلك مع الأرانب في كاليفورنيا.

والحادثة الثالثة ذات الدلالة حدثت في جزيرة جامايكا. فقد وجدت فيها بكثرة الثعابين السامة. وللتخلص منها تقرر إدخال **الطائر - السكرتير** إلى الجزيرة التي يعتبر عدواً لا يشق له غبار للثعابين السامة. وتناقص عدد الثعابين سريعاً فعلاً ولكن تكاثرت

(*) في جزر هاواي طردت العصافير كل الطيور الصغيرة الأخرى تماماً.

بشكل غير عادي جرذان الحقل والتي كانت الثعابين تقتات عليها من قبل. ولقد أحدثت الجرذان أضراراً كبيرة لمزارع قصب السكر مما أدى إلى التفكير جدياً في القضاء عليها. من المعروف أن عدو الجرذان هو **المانجوست الهندي**. فتقرر جلب 4 أزواج منه إلى الجزيرة وإعطاؤها حرية التكاثر. لقد تأقلم المانجوست مع الوطن الجديد وبسرعة سكنوا في كل الجزيرة. ولم تمض عشر سنوات حتى قضت تقريباً على كل الجرذان ولكن للأسف أصبح المانجوست يتغذى على أي شيء يقع أمامه بعد القضاء على الجرذان، وصار من الحيوانات التي تأكل كل شيء، فهاجمت الكلاب الصغيرة، والماعز، والخنازير والطيور المنزلية وبيضها. وبازدياد عددها أخذت تهاجم الحدائق وحقول القمح والبساتين. وابتدأ السكان في القضاء على حلفائهم القريبين ولكنهم استطاعوا فقط لدرجة معينة أن يحدوا من الضرر الذي سببه المانجوست.

65- غذاء مجاني. قرر عشرة شبان الاحتفال بالتخرج من المدرسة الثانوية بتناول الغداء في أحد المطاعم. عندما اجتمع شملهم وقدم الطبق الأول، اختلفوا حول كيفية أو وضع جلوسهم حول المائدة. فاقترح بعضهم أن يجلسوا تبعاً لأبجدية الأسماء، بينما اقترح آخرون أن يجلسوا تبعاً للسن واقترح فريق ثالث أن يجلسوا تبعاً لدرجاتهم في الدراسة، والفريق الرابع - تبعاً للطول...إلخ. وطال النقاش، وبرد الحساء ولم يجلس أحد حول المائدة. وصالحهم النادل الذي توجه إليهم بالحديث التالي:

- أيها الأصدقاء الشباب، اتركوا مشاجراتكم. اجلسوا حول المائدة كيفما اتفق، واستمعوا إليّ.

وجلس الجميع كيفما اتفق واستطرد النادل قائلاً:

- دع أحدكم يكتب بأي نظام تجلسون الآن. وغداً ستحضرون إلى هنا للغداء أيضاً وستجلسون في نظام آخر. وبعد غد ستجلسون بطريقة أخرى...إلخ إلى أن تجربوا كل التوزيعات الممكنة. وعندما يأتي الدور لكي تجلسوا كما تجلسون الآن هنا، عندئذ أعدكم وعد حق، بأن أبدأ كل يوم بتقديم أطيب أنواع الطعام لكم مجاناً.

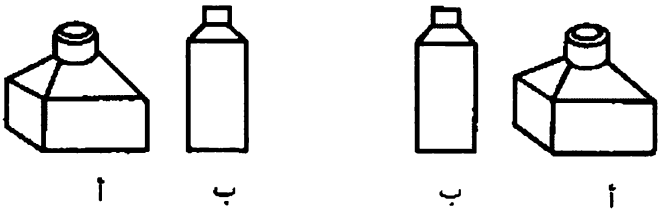
وأعجبهم الاقتراح. وتقرر أن يجتمعوا كل يوم في هذا المطعم وتجربة كل طرق التوزيع حول المائدة، لكي يبدأ وبسرعة تناول وجبات الغداء المجانية.

ولكن لم يحل هذا اليوم، ليس لأن الجرسون لم يفِ بوعده، ولكن لأن عدد التوزيعات الممكنة حول المائدة كان كبيراً للغاية. فهي تساوي لا أكثر ولا أقل من 3628800. ويبلغ هذا العدد من الأيام، مهما كان الحساب سهلاً، 10000 سنة تقريباً.

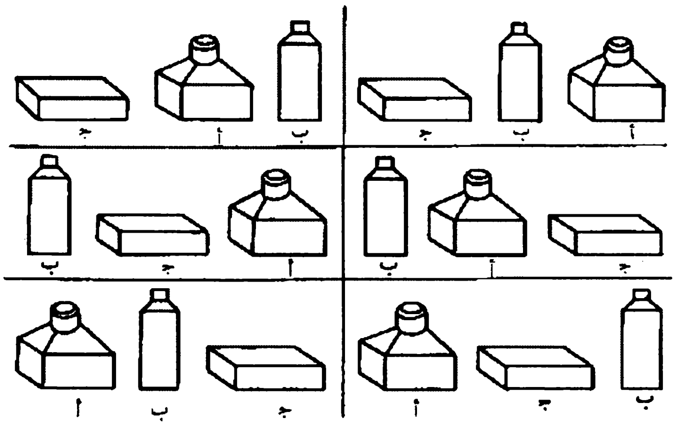
وقد يبدو لكم أنه من غير المحتمل أن يستطيع 10 أشخاص التوزع بمثل هذا العدد الكبير من الطرق المختلفة. فلتراجع الحساب بنفسك.

قبل كل شيء يلزم أن تتعلم تحديد عدد التبادلات. وللتسهيل سنبدأ بحساب عدد صغير من الأشياء - من ثلاثة. سنسميهم أ، ب، ج.

نحن نريد أن نعرف بكم طريقة يمكن تغيير ترتيب كل واحد في مكان الآخر. سنناقش ذلك كالآتي. لو تركنا مؤقتاً الشيء ج، فإن الشيئين الآخرين يمكن وضعهما بطريقتين فقط.



شكل 55. شيئان يمكن وضعهما بطريقتين فقط



شكل 56. ثلاثة أشياء يمكن وضعها بست طرق

والآن سنضم الشيء ج إلى كل من هذه الأزواج. ونستطيع أن نفعل ذلك بطرق ثلاث: إذ نستطيع:

1) وضع ج **خلف** الزوج.
2) وضع ج **أمام** الزوج.
3) وضع ج ما **بين** الشيئين.

ومن الواضح أنه لا توجد أوضاع أخرى للشيء ج عدا هذه الأوضاع. وبما أن لدينا الزوجين أ ب و ب أ، فإن كل طرق توزيعات الأشياء ستكون:

$$6 = 3 \times 2$$

وهذه الطرق مبينة على الشكل 56.

فلنواصل العملية، ونحسب الأوضاع لأربعة أشياء.

لنفرض أن لدينا أربعة أشياء: أ ، ب ، ج ، د. ومرة أخرى سنضع جانباً مؤقتاً شيئاً واحداً، ليكن د، ونجري على الأشياء الثلاثة الباقية كل التغييرات الممكنة. نحن نعلم الآن أن عدد هذه التغييرات ستة. بكم من الطرق يمكن إضافة الشيء الرابع د إلى كل من الثلاثات الستة؟ من الواضح أن هذا ممكن بأربع طرق: فيمكن:

1) وضع د خلف الثلاثة؛

2) وضع د أمام الثلاثة؛

3) وضع د ما بين الشيئين الأول والثاني؛

4) وضع د ما بين الشيئين الثاني والثالث.

ونحصل بالتالي على ما مجموعه:

$4 \times 6 = 24$ تغييراً

وبما أن $6 = 2 \times 3$ و $2 = 1 \times 2$ فإن عدد كل التغييرات التي يمكن تصورها في شكل حاصل الضرب:

$$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

إذا واصلنا الاستدلال بنفس الطريقة في حالة 5 أشياء سنعرف أن عدد التغييرات فيها سيكون مساوياً:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

وتكون التغييرات بالنسبة لـ 6 أشياء:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ تغييراً وهكذا.

فلنعد الآن إلى قصة الأفراد العشرة الذين يتناولون الغداء في المطعم. فسيتحدد عدد التغييرات هنا لو أجهدنا نفسنا في حساب حاصل الضرب:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$ عندئذ نحصل على العدد المذكور أعلاه وهو:

3628800

ولكان الحساب أصعب إذا ما كان هناك وسط الأشخاص العشرة الجالسين وراء مائدة الغداء 5 بنات وأردن أن يجلسن حول المائدة بحيث يتناوبن في الجلوس مع الشباب. وعلى الرغم من أن عدد التغييرات الممكنة هنا أقل بكثير فإن حسابها أصعب بعض الشيء.

فلنفرض أنه يجلس أحد الشباب وراء المائدة - كيفما اتفق. عندئذ يستطيع الأربعة الباقون أن يتوزعوا في الجلوس مع ترك كراسي خالية للبنات بين كل واحد والآخر بـ $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ طريقة مختلفة. بما أن عدد الكراسي 10، فإن أول شاب يستطيع أن يجلس بـ 10 طرق. وهذا يعني أن عدد كل التغييرات الممكنة للشباب هو $10 \times 24 = 240$ تغييراً.

بكم طريقة يمكن أن تجلس الخمس بنات على الكراسي الخالية بين الشباب؟ من الواضح أنها $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ طريقة. وبحساب كل من الـ 240 وضعاً التي يتخذها الشباب مع كل من الـ 120 وضعاً للبنات نحصل على عدد كل التوزيعات الممكنة وهو:

$$28800 = 120 \times 240$$

إن هذا العدد أصغر بعدة مرات من العدد السابق، ففي هذه المرة يلزم فقط 79 سنة (إلا قليلاً). لو أن رواد المطعم الشباب عاشوا حتى عمر المائة عام لاستطاعوا الحصول على الغداء المجاني ليس من نفس النادل ولكن ممن سيخلفه.

نستطيع الآن بمعرفة حساب التبديلات تحديد كم من الأوضاع المختلفة لحجر الداما يمكن في علبة لعبة الـ (15)(*). بالأحرى نحن نستطيع حساب عدد كل المسائل التي تستطيع أن تقترحها علينا هذه اللعبة. ومن السهل إدراك أن الحساب يؤدي إلى تحديد عدد التبديلات من 15 شيئاً. نحن نعرف الآن أنه لتحديد ذلك يلزم ضرب:

$$15 \times 14 \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ويعطينا الحساب النتيجة التالية:

1307674365000

أي أكثر من التريليون.

إن نصف هذا العدد الضخم من المسائل غير قابل للحل. ومعنى ذلك أنه يوجد أكثر من 600 مليار من الأوضاع غير

(*) عند ذلك يجب أن يبقى المربع الخالي في الزاوية اليسرى السفلي دائماً.

المحلولة في هذه اللعبة. من هنا يفهم هذا الوباء في الولوع بلعبة الـ (15) الذي أصاب الناس الذين لم يشكوا في وجود مثل هذا العدد الضخم من الحالات التي لا تحل.

لنلاحظ أيضاً، أنه لو كان من الممكن أن نكسب حجر الداما وضعاً جديداً كل ثانية، لاحتجنا لكي نجرب كل الأوضاع الممكنة، عند العمل المستمر في اليوم بطوله، إلى أكثر من 40000 سنة.

وفي ختام حديثنا عن عدد التبديلات سنحل هذه المسألة من الحياة المدرسية.

يوجد في قاعة الدرس 25 تلميذاً. بكم طريقة يمكن إجلاسهم على المقاعد الدراسية؟

إن حل هذه المسألة -لمن استوعب كل ما أوردناه من قبل- غير معقد بتاتاً: فيلزم ضرب 25 من مثل هذه الأعداد:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 23 \times 24 \times 25$$

وتبين الرياضيات طرق اختصار كثير من الحسابات، ولكنها لا تستطيع تسهيل الحسابات المماثلة التي أوردناها الآن. ولا توجد أية طريقة أخرى لإجراء هذا الحساب بدقة كضرب كل الأعداد(*) بدقة متناهية.

(*) غير أن هذا الحساب يمكن أن يتم بالتقريب نسبياً بدون تعقيد. فكثيراً ما نجد في الرياضيات الحاجة لحساب حاصل ضرب الأعداد الحقيقية من واحد إلى أحد الأعداد مثل ن. ويرمز لحاصل الضرب هذا بالرمز ن! ويسمى بـ ن - فاكتوريال. وعلى سبيل المثال فإنه يمكن أن يرمز لحاصل الضرب المذكور أعلاه، باختصار، بالرمز 25! في القرن الثامن عشر =

إن التجميع الموفق للحدود وحده يسمح بعض الشيء باختصار زمن الحساب. والنتيجة التي نحصل عليها ضخمة إذ تتألف من 26 رقماً - وهو عدد لا يمكن لخيالنا أن يتصور مقداره.

وإليك هذا العدد:

15511210043330985984000000

إن هذا العدد يعتبر، طبعاً، من أضخم الأعداد التي قابلتنا حتى الآن - وله الحق قبل الأعداد الأخرى في أن يسمى بـ «العدد العملاق». وعدد القطرات الدقيقة جداً في كل المحيطات والبحار على الكرة الأرضية يعتبر قليلاً إذا ما قورن بهذا العدد العملاق.

66- نقل القطع النقدية: عندما كنت طفلاً أراني أخي الأكبر، كما أذكر، اللعبة المشهورة للقطع النقدية. فوضع ثلاثة أطباق بجانب بعضها البعض، ووضعت في الطبق الأخير (الطرفي) كومة مؤلفة من 5 قطع نقدية: في الأسفل روبل وفوقه 50 كوبيكاً ثم 20 كوبيكاً ثم 15 كوبيكاً وفي الأعلى 10 كوبيكات.

= وضع العالِم الرياضي الإنكليزي ستيرلنج معادلة تسمح بالتقريب بحساب الفاكتوريال. وتكتب هذه المعادلة بالشكل الآتي:

$$\text{ن}! \approx \sqrt{2\,\text{ط}\,\text{ن}}\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)^{\text{ن}}$$

حيث ط ≈ 3.141 ، هـ ≈ 2.718 - عددان يلعبان دوراً هاماً في مسائل الرياضيات المختلفة. وباستخدام جدول اللوغاريتمات من السهل الحصول بواسطة معادلة ستيرلنج على:

$25! \approx 1.55 \times 10^{25}$

يجب نقل هذه القطع النقدية إلى الطبق الثالث مع المحافظة على القواعد الثلاث الآتية: القاعدة الأولى: أن تنقل لمرة واحدة قطعة نقدية واحدة. القاعدة الثانية: ألا تضع القطعة النقدية الكبرى فوق الصغرى. القاعدة الثالثة: يمكن مؤقتاً وضع القطع النقدية في الطبق الأوسط مع المحافظة على القاعدتين السابقتين، ولكن في نهاية اللعبة يجب أن تكون كل القطع النقدية في الطبق الثالث بنفس النظام الذي كان أولاً. والقواعد، كما ترى، ليست معقدة. والآن فلنبدأ العمل.

بدأت بإعادة وضع قطع النقود. فوضعت الـ 10 كوبيكات في الطبق الثالث والـ 15 كوبيكاً في الطبق الأوسط واحترت أين أضع الـ 20 كوبيكاً؟ إنها أكبر من الـ 10 كوبيكات ومن الـ 15 كوبيكاً.

وأغاثني أخي قائلاً:

- كيف الحال؟ ضع العشرة كوبيكات في الطبق الأوسط فوق الـ 15 كوبيكاً. عندئذ سيخلو الطبق الثالث للعشرين كوبيكاً.

وفعلت ذلك. ولكن برزت بعدها صعوبة أخرى. أين أضع القطعة النقدية ذات الـ 50 كوبيكاً؟ غير أنني تنبهت بسرعة ونقلت أولاً الـ 10 كوبيكات إلى الطبق الأول والـ 15 كوبيكاً إلى الطبق الثالث، ثم الـ 10 كوبيكات أيضاً إلى الطبق الثالث. الآن يمكن أن توضع القطعة النقدية من فئة 50 كوبيكاً على الطبق الأوسط الخالي. ثم بعد سلسلة طويلة من النقلات استطعت أيضاً أن أنقل القطعة النقدية من فئة الروبل من الطبق الأول، وفي النهاية جمعت كل كومة القطع النقدية في الطبق الثالث.

سأل أخي مستحسناً ما قمت به:

- كم عدد جميع النقلات لديك؟

- لم أعدها.

- فلنعدها. أليس من الطريف أن تعرف ما هو أصغر عدد للحركات يكفل بلوغ الهدف. وإذا ما كانت الكومة مؤلفة ليس من 5 قطع ولكن من قطعتي نقود فقط هي من فئة 15 كوبيكاً و10 كوبيكات، فكم عدد الحركات التي وجب القيام بها؟

- ثلاثة: تنقل الـ 10 كوبيكات إلى الطبق الأوسط، تنقل الـ 15 كوبيكاً إلى الطبق الثالث، ثم تنقل الـ 10 كوبيكات إلى الطبق الثالث.

- صحيح. فلنضف الآن قطعة نقدية أخرى من فئة الـ 20 كوبيكاً، ونحسب بعد كم حركة يمكن نقل الكومة من هذه القطع النقدية. سنفعل الآتي: سننقل أولاً وعلى التوالي القطعتين النقديتين الصغريين إلى الطبق الأوسط. إن ذلك يتطلب، كما نعرف، إجراء 3 حركات. ثم ننقل القطعة النقدية من فئة الـ 20 كوبيكاً إلى الطبق الثالث الخالي بحركة واحدة. وعندما تنقل القطعتين النقديتين من الطبق الأوسط أيضاً إلى الطبق الثالث نقوم بـ 3 حركات. ويكون مجموع كافة الحركات 3 + 1 + 3 = 7.

- أما عدد الحركات بالنسبة لأربع قطع نقدية فاسمح لي أن أعدّها بنفسي. أولاً سأنقل القطع النقدية الصغرى الثلاث إلى الطبق المتوسط 7 حركات، ثم أنقل الـ 50 كوبيكاً إلى الطبق الثالث بحركة

واحدة ثم أنقل القطع الصغرى الثلاث إلى الطبق الثالث مرة أخرى بـ 7 حركات أخرى، فالمجموع يكون 7 + 1 + 7 = 15.

- ممتاز. وكيف الأمر بالنسبة لخمس قطع نقدية؟

فأجبته فوراً:

- 15 + 1 + 15 = 31 حركة.

- حسناً لقد فهمت طريقة الحساب. ولكنني سأريك كيف يمكن تبسيطها أكثر. لاحظ أن الأعداد التي حصلنا عليها 3، 7، 15، 31 تمثل كلها اثنين مضروبة في نفسها مرة أو عدة مرات، ولكن يطرح الواحد الصحيح. انظر:

وكتب أخي الجدول التالي:

$$3 = 2 \times 2 - 1$$

$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

- أنا أفهم ما تقول فإن عدد القطع النقدية التي تنقل، يكون مساوياً لعدد ضرب الاثنين في نفسها ثم يطرح الواحد الصحيح. وأستطيع الآن أن أحسب عدد حركات أية كومة من النقود. فمثلاً بالنسبة لسبع قطع نقدية:

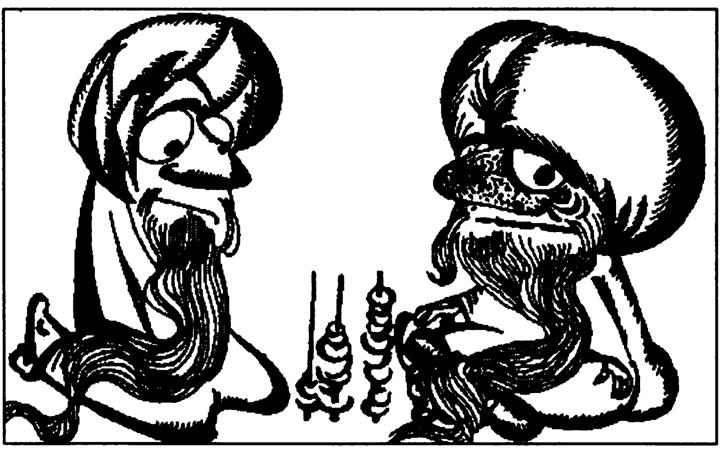
$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127$$

- ها قد فهمت هذه اللعبة القديمة. لكن يجب أن تعرف قاعدة عملية واحدة هي: إذا كان عدد القطع النقدية في الكومة

فردياً فإن أول قطعة نقدية تنقل إلى الطبق الثالث، أما إذا كان زوجياً فتنقل إلى الطبق الأوسط.

– لقد قلت: اللعبة القديمة. ألم تبتدعها أنت نفسك؟

– لا، لقد أجريتها باستخدام القطع النقدية لا غير. أما اللعبة فقديمة ويقال إنها ولدت في الهند. وهناك أسطورة طريفة حول هذه اللعبة. ويزعم أنه يوجد في مدينة بيناريس معبد أقام فيه الإله الهندي براهما عند خلق الكون ثلاثة عصيات من الألماس ووضع على إحداها 64 حلقة ذهبية: كبراهن في الأسفل، وكل حلقة تالية أصغر من سابقتها. ووجب على كهنة المعبد أن يقوموا بنقل الحلقات بلا كلل نهاراً وليلاً من إحدى العصيات إلى الثانية مع استخدام العصية الثالثة كمساعدة وبالمحافظة على قواعد لعبتنا بأن ينقلوا في المرة الواحدة حلقة واحدة فقط وعدم جواز وضع الكبرى فوق الصغرى. وتقول الأسطورة إنه عندما ستنتقل الـ 64 حلقة ستحل نهاية العالم.



شكل 57. لا بد وأن يقوم الكهنة بنقل الحلقات بلا كلل

- أوه، هذا يعني لو صدقنا هذه الأسطورة لكان العالم يجب أن يفنى منذ زمن بعيد.

- أظن أنك تعتقد أن نقل 64 حلقة لا يتطلب وقتاً طويلاً؟

- طبعاً، فلو أجرينا حركة في كل ثانية، لأمكن في الساعة الواحدة إجراء 3600 نقلة.

- حسناً، ثم ماذا؟

- أي نجري في يوم كامل حوالي مائة ألف نقلة. وفي عشرة أيام مليون نقلة. أنا واثق أنه بمليون خطوة ممكن أن ننقل حتى ألف حلقة.

- لقد أخطأت، فلكي ننقل 64 حلقة فقط نحتاج إلى 500 مليار سنة تقريباً!

- ولكن ما السبب؟ أليس عدد الخطوات يساوي حاصل ضرب 64 اثنين ناقصاً الواحد، وهذا يبلغ... مهلاً، سأقوم بعملية الضرب الآن!

- عظيم. ما دمت مشغولاً بذلك، فيمكنني الذهاب لأداء بعض الأعمال.

ذهب أخي، وتركني غارقاً في الحسابات. فوجدت أولاً حاصل ضرب 16 اثنين، ثم ضربت هذه النتيجة -65536- في نفسها، وما نتج عن ذلك ضربته مرة ثانية في نفسه، ولم أنسَ أن أطرح الواحد الصحيح.

وحصلت على العدد الآتي:

18446744073709551615(*)

إذن، كان أخي على حق...

ربما يهمكم أن تعرفوا بأي الأعداد يتحدد عمر العالم. وتوجد لدى العلماء في هذا المجال بعض المعطيات المقربة طبعاً.

يبلغ عمر الشمس 5000000000000 سنة.

يبلغ عمر الكرة الأرضية 3000000000 سنة.

يبلغ عمر الحياة على الأرض 1000000000 سنة.

يبلغ وجود الإنسان لا أقل من 500000 سنة.

67- المراهنة. جرى الحديث أثناء تناول الغداء في مطعم بيت الراحة عن كيفية حساب احتمال الحوادث. فأخرج عالِمٌ رياضي شاب صادف وجوده ضمن من يتناولون الطعام، أخرج قطعة نقدية وقال:

شكل 58. يمكن وضع قطعة النقود على المنضدة بطريقتين

(*) يعرف القارئ هذا العدد: فهو يمثل المكافأة التي طلبها مخترع لعبة الشطرنج.

- سأرمي قطعة نقدية على المائدة دون أن أنظر. ما هو احتمال أن تقع والصورة إلى أعلى؟

- اشرح أولاً ما الذي يعنيه «الاحتمال»، إن هذا ليس واضحاً لدى الجميع.

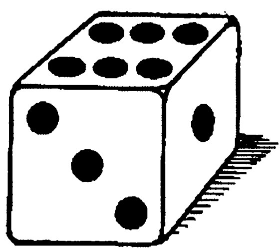
- أوه، هذا شيء بسيط جداً! إن القطعة النقدية تستطيع أن تقع على المنضدة بطريقتين (شكل 58): هكذا والصورة إلى أعلى أو هكذا والصورة إلى أسفل.

تجوز حالتان فقط من جميع الأحوال الممكنة هنا. منها بالنسبة للحادثة التي تهمنا تكون مناسبة حادثة واحدة فقط. والآن توجد النسبة:

$$\frac{\text{عدد الحوادث المناسبة}}{\text{عدد الحوادث الممكنة}} = \frac{1}{2}$$

إن الكسر $\frac{1}{2}$ يمثل «احتمال» وقوع القطعة النقدية والصورة إلى أعلى.

وتدخل أحدهم:



شكل 59. زهر اللعب

- بالنسبة للقطعة النقدية هذا بسيط ولكن ابحث حالة أعقد، مثلاً حالة زهر اللعب.

وافق العالِم الرياضي قائلاً:

- دعنا نبحث ذلك، إن زهر اللعب هو مكعب توجد أعداد على جوانبه (شكل59). ما هو احتمال أن يقع المكعب بعد رميه برقم معين إلى أعلى، فلنقل أن يظهر الرقم ستة؟ ما هي كل الحالات الممكنة هنا؟ ممكن أن يقع المكعب على أي جانب من جوانبه الستة، وهذا يعني أن هناك 6 حالات فقط. وتناسبنا منها واحدة فقط هي عندما تكون الست إلى أعلى. وهكذا نحصل على الاحتمال بقسمة 1 على 6. باختصار، يعبر عن الاحتمال بالكسر $\frac{1}{6}$.

وسألت إحدى السيدات:

- أيمكن حساب الاحتمال في كل الحالات؟ خذ مثلاً هذا المثال. لقد حزرت أن أول مار نراه من نافذة المطعم سيكون رجلاً. ما هو احتمال أن يكون ما حزرته صحيحاً؟

- من الواضح أن الاحتمال سيكون مساوياً النصف لو أننا اتفقنا على أن الطفل الذي عمره سنة واحدة، يمكن أن يعتبر رجلاً. وعدد الرجال على الأرض يساوي عدد النساء.

وسأل أحد الموجودين:

- وما هو احتمال أن يكون أول اثنين من المارة رجلين؟

- هذا الحساب أصعب بعض الشيء. سنعد ما هي الحالات الممكنة في هذا المجال. أولاً، يمكن، أن يكون الشخصان - رجلين. ثانياً، إنه سيظهر أولاً رجل ومن ثم امرأة. ثالثاً، بالعكس: إنه ستظهر أولاً امرأة ومن ثم رجل. وأخيراً الحالة الرابعة: أن يكون الاثنان امرأتين. وهكذا يبلغ عدد الأحوال الممكنة أربع. منها حالة واحدة مناسبة فقط، وهذا واضح وهي الحالة الأولى. نحصل للاحتمال على الكسر $\frac{1}{4}$. وبذلك تكون مسألتك قد حلت.

- مفهوم. ولكن يمكن أن نضع السؤال ليشمل ثلاثة رجال: فما هو احتمال أن يكون أول ثلاثة مارة كلهم رجالاً؟

- فلنحسب هذا أيضاً. سنبدأ مرة ثانية من حساب الحالات الممكنة. يكون عدد كل الحالات بالنسبة لاثنين من المارة يساوي، كما نعلم، أربع. وبإضافة الشخص الثالث يرتفع عدد الحالات الممكنة إلى الضعف لأنه يمكن أن يضم إلى كل من المجموعات الأربع المذكورة لاثنين من المارة رجل أو امرأة. ومجموع كل الحالات الممكنة هنا يساوي $4 \times 2 = 8$. أما الاحتمال الذي نبحث عنه فمن الواضح أنه يساوي $\frac{1}{8}$، لأن الحالة المناسبة هي الحالة الأولى فقط. ومن السهل هنا أن نذكر قاعدة الحساب وهي: في حالة اثنين من المارة كان لدينا الاحتمال:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

وفي حالة ثلاثة من المارة :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

وفي حالة أربعة يساوي الاحتمال حاصل ضرب أربعة أنصاف...إلخ. وكما ترون فإن الاحتمال يقل.

– وماذا يساوي الاحتمال، على سبيل المثال عندما يكون عدد المارة عشرة؟

– أي ما هو الاحتمال بأن المارين العشرة الأوائل سيكونون جميعاً رجالاً؟ لنحسب كم يساوي حاصل ضرب عشرة أنصاف. إنه $\frac{1}{1024}$ أي أقل من واحد من الألف. وهذا يعني أنه إذا راهنا بالنقود على ذلك، بأن تقولوا إن هذا سيحدث، وتضعون روبلاً واحداً، فإنني أستطيع أن أراهن بـ 1000 روبل قائلاً إن ذلك لن يحدث.

وقال أحدهم:

– رهان مربح! إنني كنت أضع الروبل برضا كي أحظى بإمكانية كسب ألف روبل كاملة.

– ولكن توجد ألف فرصة مقابل فرصتك الواحدة – يجب أن تأخذ هذا في الاعتبار أيضاً.

– إن هذا لا يعني شيئاً. لقد كنت أغامر بالروبل مقابل الألف حتى على أن مائة من المارة سيكونون كلهم رجالاً.

وسأل العالِم الرياضي:

– وهل تتصور كم هو صغير احتمال حدوث ذلك؟

– واحد من مليون أو شيء من هذا القبيل؟

- أصغر بكثير. إن جزءاً من المليون يؤلف الاحتمال بالنسبة لـ 20 من المارة. أما بالنسبة لمائة من المارة فسيكون الاحتمال... دعني أحسب ذلك على الورقة. إنه جزء من بليون... وجزء من ترليون.. وجزء من كوادرليون... أها! إنه واحد صحيح مع ثلاثين صفراً.

- فقط؟

- وهل أن 30 صفراً قليلة بالنسبة إليك؟ فلا يوجد في المحيط جزء من ألف من هذا العدد من القطرات الصغيرة جداً.

- إنه عدد ضخم، حقاً! كم ستضع مقابل روبلي؟

- ها... ها! ... كل ما معي! كل ما معي من نقود.

- كلها، إن هذا كثير جداً. ضف على الرهان دراجتك. والحق أنك لن تضعها؟

- ولِمَ لا؟ تفضل! فلتكن الدراجة إذا أردت. أنا لا أغامر بشيء أبداً.

- وأنا لا أغامر أيضاً. فإن الروبل ليس شيئاً كبيراً، ولكن في مقابل ذلك أستطيع أن أكسب دراجة، أما أنت فلا تكسب شيئاً تقريباً.

- ولكن لا بد أن تفهم أنك ستخسر حتماً! ولن تكسب الدراجة أبداً، أما روبلك فيمكن القول إنه في جيبي.

لكن صديق العالِم الرياضي أوقفه قائلاً:

- ماذا تفعل! من أجل روبل تغامر بدراجة، هذا جنون!

فأجابه الرياضي:

- على العكس، إن الجنون أن تضع ولو حتى روبلاً واحداً في مثل هذه الأحوال. فالخسارة محتمة! الأحسن أن ترمي الروبل.

- ولكن هناك فرصة واحدة؟

قطرة واحدة في محيط كامل. في عشرة محيطات! هذه هي فرصتك. وأما بالنسبة لي فعشرة محيطات ضد قطرة واحدة. إن مكسبي محقق مثل كون الأربعة ضعف الاثنين.

قال صوت هادئ لعجوز كان يسمع النقاش صامتاً طول الوقت:

- تحمس أيها الشاب... تحمس..

- كيف؟ وأنت أيضاً يا أستاذ تناقش بأفكار ضيقة الأفق؟

- هل فكرت أن ليس كل الحالات هنا يمكن أن تحدث بنفس الاحتمال؟ إن حساب الاحتمال صحيح لأي الأحداث فقط؟ للأحداث ذات الاحتمال المتساوي الحدوث. أليس كذلك؟ ولكن في المثال قيد البحث... على كل حال -قال العجوز وهو يصغي إلى الحديث- إن الواقع وحده، على ما يبدو، هو الذي سيبين لك الآن خطأك. ألا تسمع صوت الموسيقى العسكرية، صحيح أم لا؟

وبادر العالِم الرياضي في الحديث قائلاً:

- وما علاقة الموسيقى بذلك؟

ثم صمت. وبانَ على وجهه الذعر. وهب من مكانه ونظر من النافذة مخرجاً رأسه.

وجاء صوته الكئيب يقول:

- هو كذلك! لقد خسرت الرهان!

وداعاً أيتها الدراجة...

بعد دقيقة أصبح واضحاً للجميع فيم القضية. لقد كانت تسير أمام النافذة كتيبة جنود.

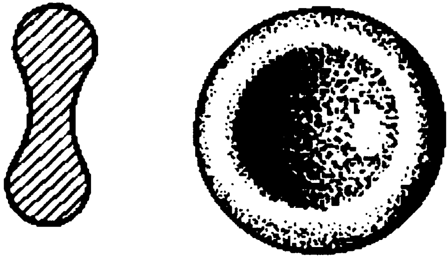
68- الأعداد العملاقة حولنا وداخلنا. ليس هناك حاجة للبحث عن أوضاع خارقة للعادة لكي نقابل الأعداد العملاقة. فهي تتواجد في كل مكان حولنا، وحتى في داخلنا، ويلزم فقط أن نحسن مشاهدتها. السماء فوق رؤوسنا، والرمل تحت أقدامنا، والهواء من حولنا، والدم في أجسامنا... كل هذا يخفي في نفسه عمالقة غير منظورة من عالم الأعداد.

ولا تعتبر العمالق العددية في الفضاء السماوي بالنسبة لأغلب الناس شيئاً مفاجئاً. فمعروف جيداً، أن الحديث سيكون عن عدد نجوم الكون وعن المسافات التي تبعد بها عنا وبين بعضها البعض وعن مقاييسها، ووزنها، وعمرها، ... ففي كل الأحوال نقابل أعداداً تفوق المخيلة بضخامتها. ليس عبثاً أن أصبحت عبارة «العدد الفلكي» ذائعة الصيت. وعلى الرغم من ذلك، فإن الكثيرين لا يعرفون أن حتى الأجسام السماوية التي غالباً ما يسميها الفلكيون «صغيرة»، تكون عمالقة حقيقة، لو استخدمنا تجاهها المقياس الأرضي المعروف.

وتوجد في مجموعتنا الشمسية كواكب سماها الفلكيون بـ «الصغرى» نظراً لصغر حجمها. منها ما يبلغ طول قطرها بضعة كيلومترات. وتكون بالنسبة للفلكي المعتاد على المقاييس العملاقة، من الضآلة بحيث إنه عندما يتكلم عنها، يصفها بلا مبالاة بـ «الضئيلة». ولكنها تعتبر أجسام «ضئيلة» فقط بجانب الكواكب السماوية الأخرى التي تكون أضخم، أما بالنسبة للمقياس العادي الإنساني فهي ليست صغيرة. فلنأخذ كوكباً ضئيلاً يبلغ قطره 3 كم. وتبعاً لقواعد الهندسة من السهل حساب أن سطح مثل هذا الجسم يكون 28 كم^2 أو 28000000 م^2. ويمكن أن يتخذ مكانه وقوفاً 7 أشخاص على 1 م^2. وبذلك ترون أنه يوجد على 28 مليون م^2 مكان لـ 196 مليون إنسان.

كما أن الرمل الذي ندوسه كذلك يدخلنا إلى عالم العمالقة العددية. وليس عبثاً أن ظهرت منذ القدم عبارة «لا يحصى كالرمل» وعلى أي حال فإن القدماء قد قللوا من مقدار عدد الرمل قائلين إنه يساوي كثرة النجوم. في قديم الزمان لم تكن هناك تليسكوبات كان يمكن للمرء أن يشاهد بالعين المجردة في السماء ما يقرب من 3500 نجمة (في نصف الكرة الأرضية الواحد). ويزيد عدد الرمل على شاطئ البحر بملايين المرات على عدد النجوم الممكن رؤيتها بالعين المجردة.

إن العملاق العددي العظيم يكمن في الهواء الذي نتنفسه. فكل سنتيمتر مكعب من الهواء، أو كل قمع يحتوي على 27 كوينتيليونا (أي العدد 27 مع 18 صفر) من الجزيئات الصغيرة التي تسمى بـ «الجزيئات».



شكل 60

ومن المستحيل تصور مدى ضخامة هذا العدد. ولو كان في الكون مثل هذا العدد من الناس لما كفت الأماكن على كوكبنا. وفي الحقيقة فإن سطح الكرة الأرضية بحساب كل القارات والمحيطات يساوي 500 مليون كيلومتر مربع. وبتقسيمها إلى أمتار مربعة نحصل على:

500000000000000 م^2

لنقسم 27 كوينتيليوناً على هذا العدد فنحصل على 54000. وهذا يعني أنه كان سيكون على متر مربع من سطح الأرض أكثر من 50 ألف إنسان !

لقد ذكرنا سابقاً أن العمالقة العددية تختبئ داخل الجسم البشري أيضاً. سنبين ذلك بأخذ دمنا كمثال. لو أننا نظرنا إلى نقطة الدم تحت الميكروسكوب، لوجدنا أنه تسبح فيها مجموعة ضخمة من أجسام صغيرة جداً ذات لون أحمر هي التي تعطي الدم لونه. كل واحدة من هذه «الأجسام الدموية الحمراء» لها شكل وسادة

صغيرة مستديرة مقعرة في الوسط (شكل 60). وكلها عند الإنسان تقريباً ذات مقاييس واحدة ويكون مقطعها تقريباً 0.007 مم وسمكها 0.002 مم. ولكن عددها ضخم. ففي قطرة الدم الصغيرة التي يبلغ حجمها 1 مم^3 يكون عددها 5 مليون. فكم عددها في جسمنا؟ يوجد في جسم الإنسان من لترات الدم أقل بحوالي 14 مرة من عدد كيلوجرامات وزنه. ولو كان وزنك 40 كجم فإن الدم في جسمك حوالي 3 لترات أو 3000000 مم^3. وبما أن كل ملليمتر مكعب يحتوي على 5 ملايين جسم أحمر، فإن العدد الكلي لها في دمك يكون:

$$15000000000000 = 3000000 \times 5000000$$

أي 15 تريليون جسم دموي. إذن ما هي المسافة التي يشغلها هذا الجيش من الدوائر لو وضعتها في صف واحدة وراء الأخرى؟ ليس من الصعب حساب، أن طول هذا الصف سيكون 105000 كم. وكان خيط الأجسام الحمراء الموجودة في دمك يمتد لأكثر من مائة ألف كيلومتر. وكان يمكن بواسطتها أن نلف بهذا الخيط الكرة الأرضية عند خط الاستواء بمقدار:

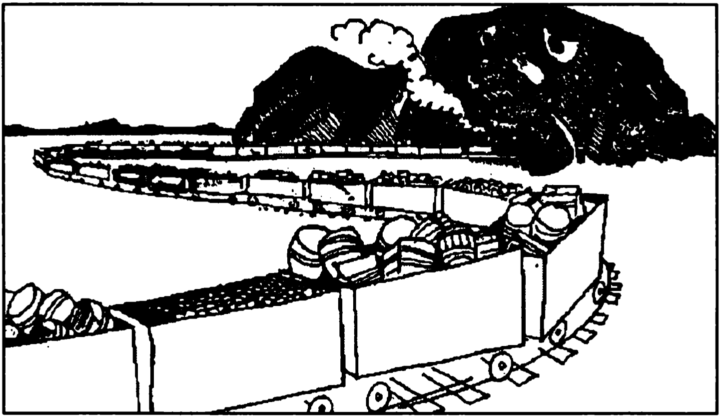
$$100000 \div 40000 = 2.5 \text{ مرة}$$

أما خيط الكرات الدموية للإنسان البالغ فيلفها بمقدار ثلاث مرات.

فلنبين ما هي قيمة مثل هذه التجزئة للأجسام الدموية بالنسبة لجسمنا. إن عمل هذه الأجسام هو نشر الأكسجين في كل الجسم. فهي تأخذ الأكسجين عندما يمر الدم خلال الرئتين

وتخرجه عندما يدخل مجرى الدم إلى أنسجة جسمنا، إلى الأماكن البعيدة عن الرئتين. إن التجزؤ الشديد لهذه الأجسام يساعد على قيامها بوظائفها لأنه كلما كانت أدق، وعددها كبيراً، كلما كان سطحها أكبر. وتستطيع الأجسام الدموية أن تمتص وتخرج الأكسجين عن طريق سطحها فقط. ويبين الحساب أن السطح الكلي للأجسام الدموية يفوق في كثير من المرات سطح الجسم البشري ويساوي 1200م^2. وتساوي هذه المساحة مساحة حديقة طولها 40 م وعرضها 30 م. والآن أنت تفهم كم هو هام لحياة الجسم أن تكون الأجسام الدموية مجزأة وبهذه الكثرة: فهي تستطيع أن تمتص وتخرج الأكسجين إلى السطح الذي هو أكبر بألف مرة من سطح جسمنا.

وينبغي أن نسمي عملاقاً عددياً بحق ذلك العدد المهيب الذي تحصل عليه لو أنك حسبت كمية الطعام التي يتناولها الإنسان خلال 70 سنة من متوسط العمر. ولاحتجنا إلى قطار سكة حديد كامل لنقل تلك الأطنان من الماء والخبز ولحم البقر والطيور والأسماك والبطاطس والخضراوات الأخرى، وآلاف البيضات، وآلاف اللترات من اللبن...إلخ التي يتناولها الإنسان خلال عمره. ويعطي الشكل 61 صورة واضحة عن هذا المجموع الكبير غير المتوقع الذي هو أكبر بأكثر من ألف مرة من وزن جسم الإنسان. عندما تراه فإنك لا تصدق أن الإنسان يمكن أن يقارع هذا العملاق، بمعنى أن يبتلع بكل معنى الكلمة، صحيح أنه ليس في مرة واحدة حمولة قطار بضائع طويل.



شكل 61. كم يأكل الإنسان خلال حياته

8

بدون مسطرة قياس

69- قياس الطريق بالخطوات. لا تتوفر مسطرة القياس أو شريط القياس دائماً، في متناول اليد. ومن المفيد أن نستطيع العمل بدونهما بأي طريقة بإجراء حتى ولو القياس التقريبي.

ومن الأسهل قياس المسافات القصيرة أو الطويلة، خلال الرحلات مثلاً، بواسطة الخطوات. من أجل ذلك يلزم معرفة طول خطوتك وأن تعرف كيف تعد الخطوات. وهي ليست دائماً متساوية بالطبع، نستطيع أن نعمل خطوات قصيرة أو عند الرغبة فيمكن أن نخطو خطوات واسعة. ولكن نحن نقوم بخطوات متساوية الطول تقريباً عند السير العادي وإذا ما عرفنا طولها المتوسط. عندئذ يمكن قياس المسافات بالخطوات بدون خطأ كبير.

ولكي نعرف طول خطوتنا المتوسطة يلزم قياس طول خطوات كثيرة ومن هنا نحسب طول الخطوة الواحدة. عندئذ، لا شك أنه لا يمكن التصرف بدون شريط أو سلك القياس.

مد الشريط على مكان مسطح وقس مسافة طولها 20 م. ارسم هذا المستقيم على الأرض وارفع الشريط. والآن سر على هذا

الخط بخطوة اعتيادية وعد عدد الخطوات التي قمت بها. من الممكن أن لا نحصل على عدد من الخطوات الكاملة على المسافة المقاسة. عندئذ، إذا كان الباقي أقصر من طول نصف خطوة فيمكن حذفه ببساطة، أما إذا كان أطول من نصف الخطوة فإن الباقي يحسب كخطوة كاملة. بقسمة الطول الكلي 20 م على عدد الخطوات نحصل على طول الخطوة الواحدة. يجب تذكر هذا العدد لكي تستخدمه عندما يلزم القياس بالخطوات.

ولكي لا نخطأ عند عد الخطوات فيمكن -وخاصة على المسافات الطويلة- أن نقوم بالحساب بالطريقة الآتية: يحسب عدد الخطوات حتى 10 فقط، وبالعد إلى هذا العدد يثنى إصبع من أصابع اليد اليسرى. وعندما تثنى جميع أصابع اليد اليسرى، أي بمرور 50 خطوة، يثنى إصبع من أصابع اليد اليمنى. ويمكن القيام بهذه الطريقة العد إلى 250، ثم تبدأ من جديد مع تذكر كم مرة ثنيت كل أصابع اليد اليمنى. وعلى سبيل المثال، إذا ثنيت جميع أصابع اليد اليمنى مرتين بالمرور على مسافة معينة وفي نهاية الطريق كان قد ثنيت على اليد اليمنى ثلاثة أصابع وعلى اليد اليسرى أربع أصابع، فإن عدد الخطوات التي قمت بها يبلغ:

$$690 = 10 \times 4 + 50 \times 3 + 250 \times 2$$

يجب أن تضاف هنا عدة خطوات أخرى، وهي التي قمت بها بعد ثني الإصبع الرابع من اليد اليسرى.

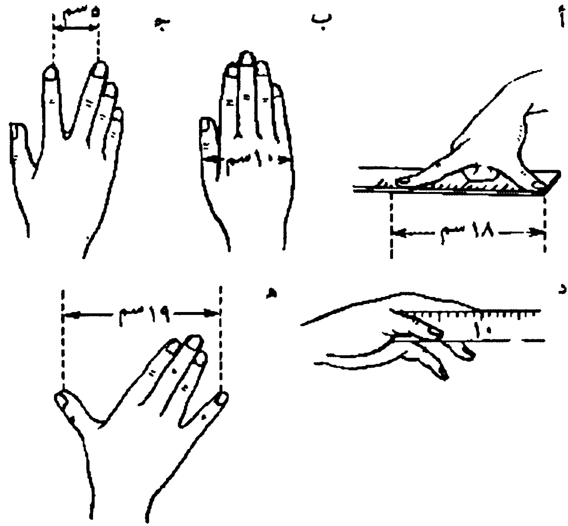
ولنذكر بالمناسبة القاعدة القديمة التالية: إن طول الخطوة المتوسطة للإنسان البالغ يساوي نصف المسافة ما بين عينيه وأخمصي قدميه.

وهناك قاعدة عملية قديمة تنسب إلى سرعة السير: يسير الإنسان في الساعة عدداً من الكيلومترات مساوياً لعدد الخطوات التي يخطوها في 3 ثوانٍ. ومن السهل تبين أن هذه القاعدة صحيحة فقط لطول معين للخطوة، زد على ذلك أيضاً أنها صحيحة للخطوة الكبيرة جداً. وفعلاً: افرض أن طول الخطوة س من الأمتار، وأن عدد الخطوات في 3 ثوانٍ يساوي ن. عندئذ يسير الرجل في 3 ثوانٍ ن س متراً، وفي الساعة (3600 ثانية) 1200 ن س متراً أو 1.2 ن س كيلومتراً. ولكي يساوي هذا الطريق عدد الخطوات التي تتم في 3 ثوانٍ، يلزم أن تتحقق المتساوية 1.2 ن س = ن أو 1.2 س = 1، من هنا تكون:

س = 0.83 متر

لو أن القاعدة السابقة عن علاقة طول الخطوة بطول الإنسان صحيحة، فإن القاعدة الثانية، التي نظرناها الآن تكون صحيحة فقط لأولئك الناس الذين يكون متوسط طولهم حوالي 175سم.

70- المقياس الحي. لقياس الأشياء ذات الحجم المتوسط مع عدم وجود مسطرة قياس أو شريط قياس يمكن أن تفعل الآتي: يلزم مد حبل أو لوحة من الخشب من طرف اليد الممدودة وحتى الكتف المقابل - ويبلغ هذا الطول عند الإنسان البالغ حوالي المتر. والطريقة الأخرى للحصول على طول المتر التقريبي هي أن نضع على مستقيم 6 «أرباع» أي 6 مسافات ما بين نهايتي الإصبع الأكبر والسبابة بمدهما بأعرض ما يمكن (شكل 62-أ).



شكل 62. ما الذي يجب قياسه بيدك كي يمكن بعد ذلك عدم استخدام شريط ا القياس

والإرشاد الأخير يدخلنا إلى فن القياس «بالأيدي المجردة»: ويتطلب ذلك فقط قياس كف يدك مقدماً وأن تتذكر نتائج القياسات جيداً.

ما الذي يجب قياسه بكف يدك؟ قبل أي شيء يلزم قياس عرض الكف كما هو مبين على الشكل (62–ب). وهو يساوي عند الإنسان البالغ 10 سم تقريباً، وقد يكون عندك أقل ولا بد أن تعرف أقل بكم. ثم يلزم قياس المسافة ما بين نهايتي الإصبعين الوسط والسبابة عند وضعهما بأوسع قدر ممكن (شكل 62–ج). ثم من المفيد معرفة طول السبابة بحسابها من قاعدة الإصبع الأكبر كما هو مبين على الشكل (62–د). وفي النهاية، قس المسافة ما بين نهايتي

الإصبع الأكبر والخنصر عند وضعهما أبعد ما يمكن عن بعضهما كما هو على الشكل (62–هـ).

باستخدام هذه «المقاييس الحية» تستطيع أن تقوم بالقياس التقريبي للأشياء الصغيرة.

71– القياس بواسطة القطع النقدية. تستطيع القطع النقدية النحاسية (البرونزية) أن تقوم بواجب نافع. ولا يعرف الكثيرون أن قطر القطعة النقدية من فئة الكوبيك تساوي بدقة $1\frac{1}{2}$ سم، وقطر القطعة من فئة الخمسة كوبيكات $2\frac{1}{2}$ سم بحيث أنه بوضع القطعتين بجانب بعضهما نحصل على 4 سم (شكل 63). هذا يعني أنه لو كان لديك عدة قطع نحاسية، فستستطيع بدقة كافية أن تحدد الأطوال الآتية:

شكل 63. قطعة نقدية من فئة الخمسة كوبيكات وقطعة نقدية من فئة الكوبيك الواحد موضوعتان بجانب بعضهما تكونان 4 سم

الكوبيك	$1\frac{1}{2}$ سم
الخمسة كوبيكات	$2\frac{1}{2}$ سم
قطعتان من فئة الكوبيك	3 سم
خمسة كوبيكات وكوبيك واحد	4 سم
قطعتان من فئة الخمسة كوبيكات	5 سم

... إلخ.

وبطرح عرض القطعة النحاسية من فئة الكوبيك الواحد من عرض القطعة من فئة الخمسة كوبيكات نحصل على 1 سم بالضبط.

إذا لم يوجد لديك لا خمسة كوبيكات ولا كوبيك واحد، وكانت معك قطعة نحاسية من فئة الكوبيكين أو الثلاثة كوبيكات، فإنهما يمكن إلى درجة معلومة أن يساعداك، إذا ما تذكرت جيداً، أن طول قطري القطعتين عند وضعهما بجانب بعضهما يساوي 4 سم (شكل 64). بثني الشريط الورقي الذي يبلغ طوله 4 سنتيمترات بالنصف ثم بثنيه مرة أخرى بالنصف، نحصل على مقياس من 4 سم(*).

وأنت ترى أنه عندما يتوفر لدى الإنسان الاستعداد والفطنة فإنه يستطيع، حتى بدون مسطرة القياس، أن يقوم بقياسات تفيد في الحياة العملية.

(*) إن قطر القطعة النقدية من فئة الـ 15 كوبيكاً يساوي 2 سم تقريباً، وتقريباً فقط لأن القطر الحقيقي لهذه القطعة النقدية 19.56 سم. أما أبعاد القطع النقدية النحاسية المذكورة أعلاه الحديثة الصك، فهي صحيحة بدقة. ومن يكون لديه فرجار مشبه يمكن أن يتأكد من ذلك.

ومن المفيد بهذا الصدد أن نضيف إلى ذلك أيضاً أن قطعنا النقدية النحاسية (البرونزية) يمكن أن تخدم عند الضرورة لا كمقياس فقط ولكن تفيد أيضاً عند الحاجة كثقل موازٍ لقياس الأحمال. إن القطع النقدية النحاسية الجديدة غير الممسوحة الحديثة الصك تزن من الجرامات بقدر ما هو مكتوب عليها من الكوبيكات: فالقطعة النقدية من فئة الكوبيك الواحد تزن جرام واحد ومن فئة الكوبيكين جرامين...إلخ. أما وزن القطع النقدية المستعملة فتقل عن تلك المعايير قليلاً. وبما أنه في الحياة اليومية غالباً لا تكون تحت يدنا مجموعة أوزان صغيرة من 1–10جم فإن معرفة العلاقات المبينة أعلاه يمكن أن تفيد جداً.

شكل 64. قطعة نقدية من فئة الثلاث كوبيكات وقطعة نقدية من فئة الكوبيكين موضوعتان بجانب بعضهما تكونان 4 سم

9

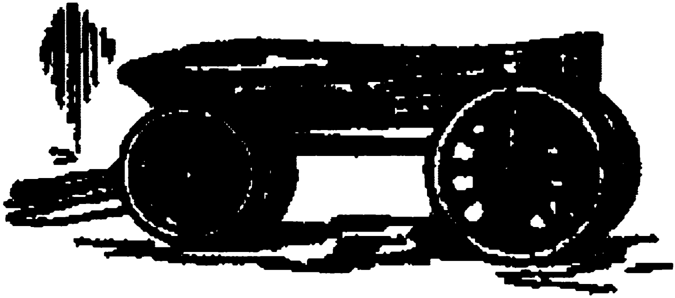
ألغاز هندسية

لا يتطلب حل الألغاز الواردة في هذا الباب معرفة مقرر الهندسة بأكمله. ويستطيع أن يحلها من له إلمام بمجموعة متواضعة من المعلومات الهندسية الأولية فقط. إن المسائل المطروحة هنا ستساعد القارئ على أن يتأكد هل هو حقاً يعرف تلك المعلومات الهندسية التي يعتقد أنه قد استوعبها. ولا تكون المعرفة الحقيقية للهندسة في مهارة سرد خصائص الأشكال فقط وإنما في فن استخدامها أيضاً عملياً لحل المهام الواقعية. فما فائدة البندقية لإنسان لا يعرف إطلاق النار؟

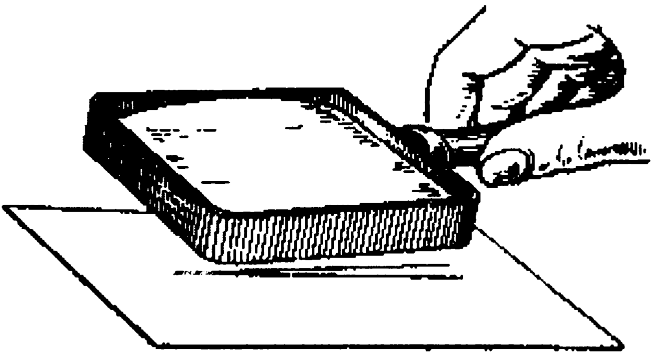
فلندع القارئ يراجع كم إصابة دقيقة يستطيع أن يصيبها من 24 طلقة على أهداف هندسية.

72- عربة النقل. لماذا يتآكل المحور الأمامي لعربة النقل أكثر ويحترق أكثر من المحور الخلفي؟

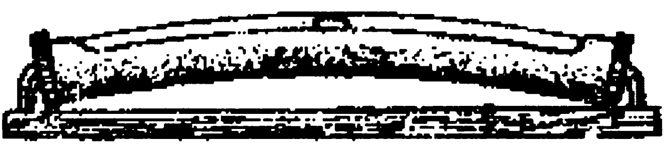
73- في عدسة التكبير. ينظر من خلال عدسة تكبير تكبر بمقدار 4 مرات إلى زاوية مقدارها $1\frac{1}{2}°$. بأي مقدار ستظهر الزاوية (شكل 66)؟



شكل 65. لماذا يتآكل المحور الأمامي أكثر من الخلفي؟



شكل 66. ما مقدار الزاوية؟



شكل 67. المقياس التجاري

74- المستوى النجاري «المقياس المائي»: تعرفون بالطبع المستوى النجاري ذي الفقاعة الغازية (شكل 67) التي تبتعد جانباً عن العلامة عندما تميل قاعدة المستوى. وكلما كان هذا الميل أكبر، كلما تحركت الفقاعة أكثر بعيداً عن العلامة التي في المنتصف. وسبب تحرك الفقاعة هو لكونها أخف من السائل الذي توجد فيه فتطفو إلى أعلى. ولكن إذا كانت الأنبوبة مستقيمة فإن الفقاعة تبتعد بسرعة إلى نهاية الأنبوبة عند أقل ميل، أي إلى أعلى جزء منها. ومن السهل تفهم أن مثل هذا المقياس لا يكون مناسباً عملياً. ولذلك تصنع أنبوبة المقياس مقوسة كما هو مبين على الشكل 67. وعند الوضع الأفقي لقاعدة مثل هذا المقياس تأخذ الفقاعة أعلى نقطة في الأنبوبة والتي توجد عند منتصفها، وإذا مالَ المستوى فإن أعلى نقطة في الأنبوبة تصبح إحدى النقط المجاورة وليس نقطة الوسط وتتحرك الفقاعة عن العلامة إلى مكان آخر في الأنبوبة.

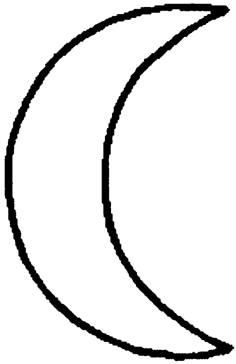
والمطلوب هنا هو أن تحدد كم من المليمترات ستبتعد الفقاعة جانباً عن العلامة إذا كان المقياس قد أميل بمقدار نصف درجة، مع العلم أن نصف قطر قوس انحناء الأنبوبة يساوي متراً واحداً.

75- عدد السطوح. قد يبدو هذا السؤال للكثيرين ساذجاً جداً أو على العكس يبدو مفرطاً في الذكاء:

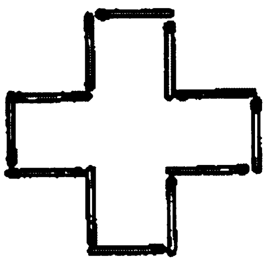
كم عدد سطوح القلم ذي الستة سطوح؟

قبل أن تنظر إلى الحل، فكِّر ملياً في المسألة.

76- الهلال. المطلوب تقسيم شكل الهلال (شكل 68) إلى 6 أجزاء بمد خطين مستقيمين فقط.



شكل 68. الهلال

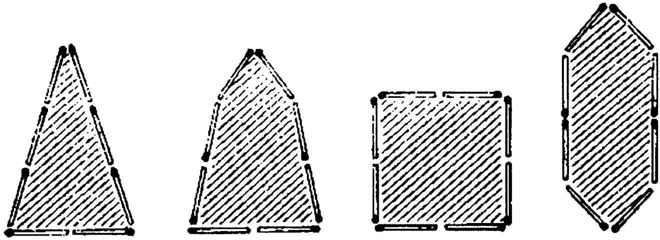


شكل 69. صليب من 12 عود كبريت

كيف نفعل ذلك؟

77- من 12 عود كبريت. يمكن من 12 عود كبريت تكوين شكل الصليب (شكل 69)، بحيث تساوي مساحته خمسة مربعات «من أعواد الكبريت».

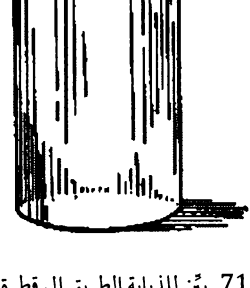
غير وضع أعواد الكبريت بحيث يشمل محيط الشكل مساحة تساوي 4 مربعات «من أعواد الكبريت» فقط.



شكل 70. كيف يمكن من 8 أعواد كبريت صنع شكل ذي أكبر مساحة ممكنة؟

لا يجوز استعمال أجهزة القياس عند حل المسألة.

78- من 8 أعواد كبريت. يمكن تكوين أشكال مقفلة مختلفة من 8 أعواد بعضها مبين على الشكل 70. وبالطبع فإن مساحاتها مختلفة. والمطلوب تكوين شكل من 8 أعواد كبريت يحيط بأكبر سطح.



شكل 71. بيِّن للذبابة الطريق إلى قطرة العسل

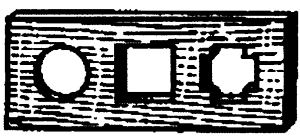
79- طريق الذباب. تظهر على السطح الداخلي لوعاء زجاجي اسطواني قطرة عسل تبعد بمسافة ثلاثة سنتيمترات عن الحافة العليا للإناء. ووقفت ذبابة في نقطة على السطح الخارجي في الطرف المقابل (شكل 71).

بيِّن للذبابة أقصر طريق للوصول إلى قطرة العسل.

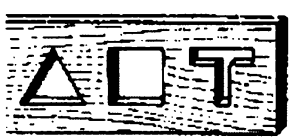
علماً بأن الذبابة نفسها ستجد أقصر طريق وبهذا تسهل عليك حل المسألة: فإن ذلك يتطلب أن تمتلك معارف هندسية شاملة لا تتحملها رأس الذبابة.

80- إيجاد السدادة. أمامك قطعة من الخشب (شكل 72) ذات ثلاث فتحات: مربعة، ومثلثة، ودائرية. هل يمكن أن توجد سدادة واحدة لغلق كل هذه الفتحات؟

شكل 72. أوجد سدادة واحدة لهذه الفتحات الثلاثاء



شكل 73. هل توجد سدادة واحدة لهذه الفتحات؟



شكل 74. هل يمكن عمل سدادة واحدة لهذه الفتحات الثلاث؟

81- السدادة الثانية. إذا تمكنت من حل المسألة السابقة، فقد يجوز أن تستطيع إيجاد السدادة لمثل تلك الفتحات المبينة على الشكل 73؟

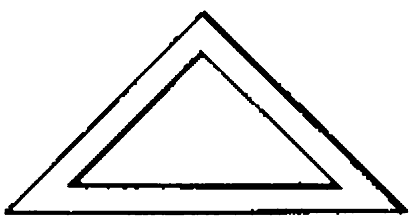
82- السدادة الثالثة. وأخيراً إليك مسألة أخرى من نفس النوع: هل توجد سدادة واحدة لكل الفتحات الثلاث المبينة على الشكل 74؟

83- إمرار القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات. خذ قطعتي نقود حديثة الصك: من فئة 5 كوبيكات وكوبيكين. ارسم على قطعة ورق دائرة تساوي بدقة محيط القطعة النقدية من فئة الكوبيكين، واقطع هذه الدائرة بعناية.

كيف تعتقد: هل ستمر القطعة النقدية من فئة خمسة كوبيكات خلال هذه الفتحة؟

لا مجال للخداع هنا: فالمسألة هندسية حقيقية.

84- ارتفاع البرج. يوجد في بلدتك ومن معالمها برج مرتفع، ولكنك لا تعرف ارتفاعه. وتوجد لديك صورة فوتوغرافية للبرج على بطاقة بريدية. كيف يمكن أن تساعدك هذه الصورة على معرفة ارتفاع البرج؟



شكل 75. هل المثلثان الداخلي والخارجي متشابهان؟

شكل 76. هل يشابه الشكل الرباعي الخارجي الشكل الرباعي الداخلي؟

85- الأشكال المتشابهة. هذه المسألة مخصصة لمن يعرف فيم يتركز التشابه الهندسي. مطلوب الإجابة على السؤالين الآتيين:

1) هل يتشابه في شكل مثلث الرسم الهندسي (شكل 75) المثلثان الخارجي والداخلي؟

2) هل يتشابه في شكل الإطار (شكل 76) المستطيلان الداخلي والخارجي؟

86- ظل السلك. إلى أي بُعد يمتد في الفراغ الظل الكامل لسلك التلغراف الذي يبلغ قطره 4 مم في اليوم المشمس؟

87- قالب الطوب. يزن قالب طوب البناء 4 كجم. كم يزن قالب الطوب الخاص باللعب المصنوع من نفس المادة ولكن مقاييسه أصغر بـ 4 مرات؟

88- العملاق والقزم. بكم مرة تقريباً يكون العملاق الذي طوله 2 م أثقل من قزم طوله 1 م؟

89- بطيختان. تباع في السوق الريفي بطيختان بأحجام مختلفة. إحداهما أعرض من الثانية بمقدار الربع وأغلى منها بمرة ونصف. أيهما شراؤها أربح؟

90- شمامتان. تباع شمامتان من نوع واحد. محيط الأولى 60 سم ومحيط الثانية 50 سم. الأولى أغلى من الثانية بمرة ونصف. أي شمامة الأربح شراؤها؟

91- الكرزة. يحيط القسم الناعم من ثمرة الكرزة بالنواة بطبقة سمكها يساوي سمك النواة. بافتراض أن للكرزة وللنواة شكلاً كروياً، هل تستطيع أن تتصور في ذهنك بكم مرة يكون حجم الجزء الغض من الكرزة أكبر من حجم النواة؟

92- نموذج برج إيفل. ارتفاع برج إيفل في باريس 300م وبني بأكمله من الحديد الذي استخدم منه في البناء حوالي 8000000 كجم. أود أن أطلب عمل نموذج للبرج المشهور يبلغ وزنه 1 كجم فقط.

كم سيكون ارتفاع النموذج؟ أعلى من القدح أم أقل؟

93- وعاءان. يوجد وعاءان من النحاس لهما شكل واحد وسمك جدارهما واحد. الأول يسع أكثر من الثاني بـ 8 مرات. بكم مرة يكون الوعاء الأول أثقل من الثاني؟

94- في الصقيع. يقف إنسان بالغ وطفل في الصقيع، والاثنان في ملابس واحدة.

لأي منهم يكون الجو أبرد؟

حل الألغاز 72-94 :

72- يبدو من أول نظرة أن هذه المسألة لا علاقة لها البتة بعلم الهندسة. ولكن في هذا بالذات يكمن إتقان معرفة هذا العلم، بغية القدرة على أن تكتشف الأساس الهندسي للمسألة، الذي يختفي وراء التفاصيل الجانبية. ومسألتنا في جوهرها هندسية بدون شك ولا يمكن حلها بدون معرفة الهندسة.

والآن، لِمَ يتآكل المحور الأمامي أكثر من المحور الخلفي؟ معروف للجميع أن العجلات الأمامية أصغر من العجلات الخلفية. وفي نفس المسافة تدور الدائرة الصغرى عدداً أكبر من الدورات ويكون محيط الدائرة الصغيرة أصغر، بذلك فهي تدور عدداً أكبر من الدورات على نفس المسافة. ومفهوم الآن أنه في كل الرحلات التي تقوم بها العربة تدور العجلات الأمامية عدداً من الدورات أكبر من التي تدورها العجلات الخلفية. وبالطبع فإن العدد الأكبر من الدورات يجعل المحور الأمامي يتآكل أسرع.

73- لو افترضت أن مقدار الزاوية يبدو من خلال العدسة هو $1\frac{1}{2} \times 4 = 6°$، فإنك بهذا تكون قد أخطأت. لأن مقدار الزاوية لا يكبر عند النظر إليها من خلال العدسة. صحيح أن طول القوس الذي يصنع الزاوية سيكبر بلا جدال، ولكن سيكبر بنفس المقدار نصف قطر هذا القوس بحيث أن مقدار الزاوية المركزية يظل بلا تغيير. وشكل 77 يوضح ما ذكرناه.

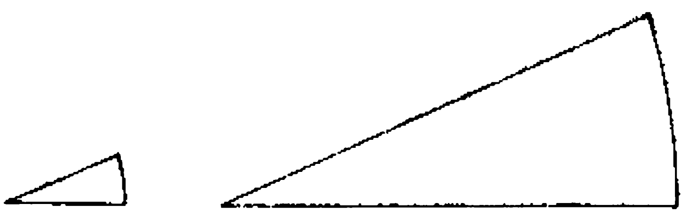
74- انظر إلى الشكل 78 حيث م أ ن هو الوضع الابتدائي لقوس مقياس المستوى. أن م′ ب ن′ هو وضعه الجديد بحيث إن

الوتر م′ ن′ يكون مع الوتر م ن زاوية مقدار $\frac{1}{2}$°. ويختار كل من وضعي المقياس بحيث تبقى الفقاعة التي كانت في نقطة أ في نفس هذه النقطة، ولكن انتقل منتصف القوس م ن إلى ب. المطلوب حساب طول القوس أ ب إذا كان نصف قطره يساوي 1 م، أما قيمة القوس بمقياس الزوايا فهي $\frac{1}{2}$° (ينجم هذا من مساواة الزوايا الحادة ذات الجوانب القائمة).

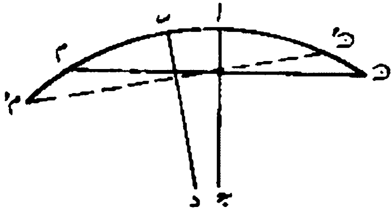
الحساب بسيط. فطول الدائرة الكاملة التي يبلغ نصف نقطرها 1 م (1000 مم) يساوي $2 \times 3.14 \times 1000 = 6280$ مم. بما أنه يوجد في الدائرة 360° أو 720 من أنصاف الدرجات، فإن طول نصف درجة واحدة يتحدد بالقسمة:

$$6280 \div 720 = 8.7 \text{ مم}$$

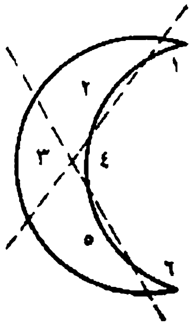
وتتحرك الفقاعة جانباً عن العلامة بمقدار يقرب من 9 مم أي بمقدار 1 سم تقريباً. من السهل رؤية أنه كلما كان نصف قطر انحناء الأنبوبة أكبر كلما كان المقياس أكثر حساسية.



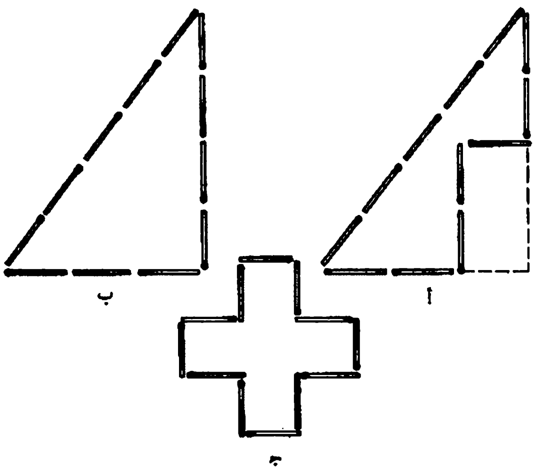
شكل 77



شكل 78



شكل 79



شكل 80

75- المسألة ليست فكاهة أبداً، ولكنها تخفي خطأ استخدام الكلمات. فإن القلم السداسي السطوح ليس له 6 سطوح كما قد يعتقد الكثيرون. ويبلغ مجموع سطوحه ثمانية -حتى عندما يكون غير مبري- هي ستة سطوح جانبية وبالإضافة إلى ذلك سطحان صغيران «لمقطعيه العرضيين». لو كان هناك حقيقة 6 سطوح لكان شكله مختلفاً تماماً - أي بشكل هندسي ذي جوانب مربعة.

عادة أن حساب الأسطح الجانبية للموشور فقط مع نسيان قاعدتيه منتشرة جداً. ويقول الكثيرون هذا موشور ثلاثي السطوح أو موشور رباعي السطوح...إلخ. في الوقت الذي يلزم تسمية هذه المواشير بثلاثية الزاوية، رباعية الزاوية...إلخ، تبعاً لشكل القاعدة. وليس هناك البتة وجود مواشير ثلاثية السطوح.

ولذلك فمن الصواب تسمية القلم المذكور في المسألة لا بالسداسي السطوح ولكن سداسي الأضلاع.

76- يجب أن نفعل كما هو مبين على الشكل 79. فنحصل على 6 أجزاء وقد رقمت للتوضيح.

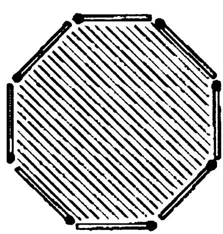
77- يجب وضع أعواد الكبريت كما هو مبين على الشكل 80-أ. ومساحة هذا الشكل تساوي ربع مساحة المربع «من أعواد الكبريت». كيف يمكن أن نتأكد من ذلك؟ فلنكمل الشكل في الخيال إلى شكل المثلث. نحصل على مثلث قائم الزاوية قاعدته 3 أعواد وارتفاعه 4 أعواد(*). مساحة هذا المثلث تساوي نصف

(*) سيفهم القراء الذين يعرفون ما يسمى بـ «نظرية فيثاغورس»، لماذا نستطيع القول بثقة عن المثلث المتكون هنا هو مثلث قائم الزاوية $3^2 + 4^2 = 5^2$

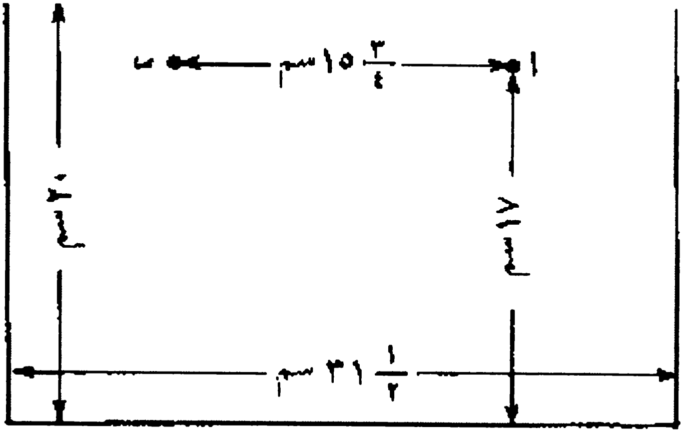
حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ مربعات يساوي طول ضلعها عوداً واحداً (شكل 80-ب). ولكن من الواضح أن مساحة الشكل أقل من مساحة المثلث بمربعين اثنين «من أعواد الكبريت» وتساوي بالتالي 4 مربعات مثل هذه المربعات.

78- يمكن إثبات أنه من بيت كل الأشكال ذات المحيط المتساوي الطول (أو كما يقال ذات المحيط الواحد) يكون للدائرة أكبر سطح. وطبعاً لا يمكن أن تكون من أعواد الكبريت دائرة ولكن يمكن صنع شكل من 8 أعواد كبريت (شكل 81) يشبه أكثر من غيره شكل الدائرة: هو ثماني الأضلاع الصحيح. وثماني الأضلاع الصحيح هو الشكل الذي يلبي متطلبات مسألتنا: فلهذا الشكل أكبر سطح.

79- لحل المسألة سنفرد السطح الجانبي للوعاء الأسطواني إلى شكل مسطح فنحصل على مستطيل (شكل 82)، ارتفاعه 20 سم، أما قاعدته فتساوي محيط الوعاء أي $10 \times 3\frac{1}{7} = 31\frac{1}{2}$ سم (إلا قليلاً). سنؤشر على هذا المستطيل علامات تدل على مكان الذبابة ومكان قطرة العسل. تكون الذبابة في النقطة أ على بُعد 17 سم من القاعدة، وقطرة العسل في النقطة ب على نفس الارتفاع، وعلى بُعد نصف محيط الوعاء من أ أي على بُعد $15\frac{3}{4}$سم.

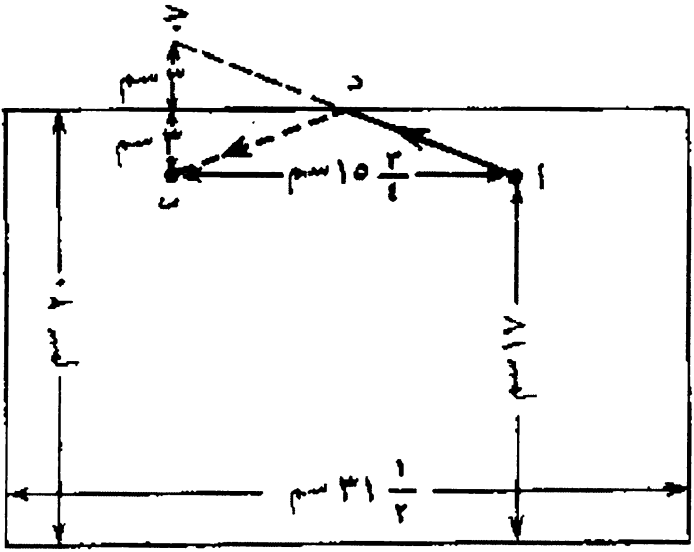


شكل 81



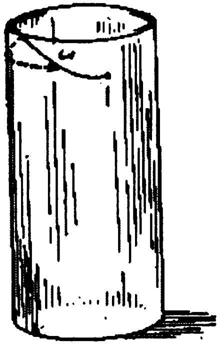
ا
ب
١٥ ٣/٤ سم
١٧ سم
٢٠ سم
٣١ ١/٢ سم

شكل 82

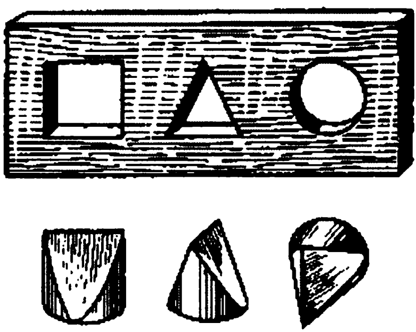


جـ
د
٣ سم
٣ سم
ا
ب
١٥ ٣/٤ سم
١٧ سم
٢٠ سم
٣١ ١/٢ سم

شكل 83

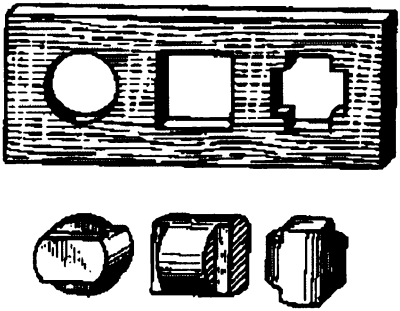


شكل 84

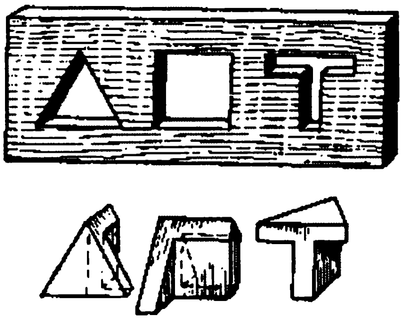


شكل 85

والآن لإيجاد النقطة التي يجب على الذبابة أن تجتاز فيها حافة الوعاء نقوم بالآتي: نمد مستقيماً من النقطة ب (شكل 83) يشكل زاوية قائمة مع الحافة العليا للمستطيل ونمده بمسافة متساوية: فنحصل على النقطة ج. نوصل هذه النقطة بخط مستقيم مع أ. ستكون النقطة د النقطة التي لا بد للذبابة أن تجتاز فيها حافة الوعاء إلى الناحية الثانية له، وأما الطريق أ د ب فيكون أقصر طريق.



شكل 86



شكل 87

بإيجاد أقصر الطرق على المستطيل المتكون، نلفه مرة ثانية على هيئة أسطوانة فنعرف كيف يجب أن تسير الذبابة لكي تصل بأسرع وقت ممكن إلى قطرة العسل (شكل 84).

ولا أعرف فيما إذا يختار الذباب في مثل هذه الأحوال هذا الطريق. ربما أن الذبابة تقوم اعتماداً على حاسة الشم بالسير في أقصر طريق ولكن هذا الاحتمال ضئيل إذ إن حاسة الشم لدى الذبابة ليست دقيقة بما فيه الكفاية لعمل ذلك.

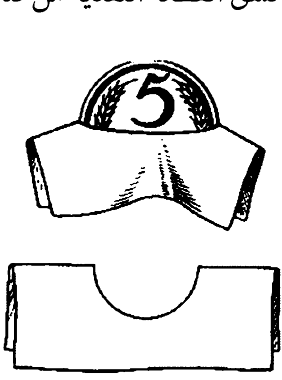
80– إن السدادة اللازمة في هذه الحالة موجودة، ولها الشكل المبين على الرسم 85. من السهل أن نرى أن سدادة واحدة كهذه يمكنها فعلاً سد الفتحات المربعة والمثلثة والمستديرة.

81– وتوجد أيضاً سدادة للفتحات المبينة على الشكل 86 المستديرة والمربعة والصليبية الشكل، وهي ممثلة في الأوضاع الثلاثة.

82– توجد مثل هذه السدادة أيضاً: أنت تستطيع أن تراه من الجوانب الثلاثة على الشكل 87.

(إن المسائل التي بحثناها الآن كثيراً ما تقابل الرسامين الهندسيين عندما يلزم تحديد شكل جزء ما من الماكينة بواسطة مساقطها الثلاثة).

83– مهما بدت غرابة هذه المسألة ولكن إمرار القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات خلال هذه الفتحة الصغيرة شيء ممكن. ولكن يلزم فقط أن تعرف كيف تقوم بهذه العملية. يجب أن تطوي الورقة بحيث تتمدد الفتحة المستديرة على شكل شق مستقيم (شكل 88) وتمر خلال هذا الشق القطعة النقدية من فئة الخمسة كوبيكات.



شكل 88

يساعد الحساب الهندسي على تفهم هذه الخدعة التي تبدو معقدة للوهلة الأولى. إن قطر القطعة النقدية من فئة الكوبيكين هو 18 مم ومحيطها كما هو من السهل حسابه يساوي 56 مم (وأكثر). ومن الواضح أنه يجب أن يكون طول الشق المستقيم أقل بمرتين من محيط الفتحة، وبالتالي يساوي 28 مم، ولكن عرض القطعة من فئة الخمسة كوبيكات هو 25 مم فقط. وهذا يعني أنها تستطيع أن تمر خلال الفتحة البالغ عرضها 28 مم حتى لو أخذنا في الاعتبار أن سمكها يساوي ($1\frac{1}{2}$ مم).

84- لتحديد ارتفاع البرج في الواقع اعتماداً على الصورة يلزم قبل كل شيء قياس ارتفاع البرج وطول قاعدته في الصورة بأدق قدر ممكن. فلنفرض أن الارتفاع في الصورة 95 مم، وطول القاعدة 19 مم. عندئذ تقيس طول قاعدة البرج في الحقيقة ولنفرض أنه كان مساوياً 14 م.

بعد إجراء ذلك تقول الآتي:

إن صورة البرج والخطوط الأصلية له متشابهة هندسياً. وبالتالي فإن صورة الارتفاع ستكون أكبر من صورة القاعدة بعدد مرات كبر ارتفاع البرج في الحقيقة عن طول القاعدة. العلاقة الأولى تساوي 95 ÷ 19 أي 5، من هنا نقول إن ارتفاع البرج أكبر من طول قاعدته بمقدار 5 مرات وتساوي في الحقيقة 14 × 5 = 70 م.

فإذن ارتفاع برج المدينة 70 م.

ولكن لا بد وأن نلاحظ أنه لتحديد الارتفاع من الصورة الفوتوغرافية لا تصلح أي صورة لذلك إذ لا بد وأن تكون النسب

غير مشوهة في الصورة المستعملة كما يحدث ذلك لدى المصورين قليلي التجربة.

85- غالباً ما يجاب على السؤالين المطروحين في المسألة بالإيجاب. ولكن في الحقيقة يكون المثلثان فقط متشابهين. أما المستطيلان الخارجي والداخلي واللذان على شكل إطار فليسا متشابهين عموماً. ويكفي لتشابه المثلثات تساوي الزوايا. وبما أن أضلاع المثلث الداخلي توازي أضلاع المثلث الخارجي، فإن هذه الأشكال متشابهة ولكن لتشابه الأشكال عديدة الأضلاع، لا يكفي تساوي الزوايا فقط (أو -وهو نفس الشيء- توازي الأضلاع بمفرده) بل يلزم كذلك أن تكون **أضلاع** الأشكال المتعددة الأضلاع **متناسبة**. وبالنسبة لرباعي الأضلاع الداخلي والخارجي في شكل الإطار يتحقق ذلك فقط في حالة المربعات (وعموداً - في حالة المعين). وفي كل الأحوال الأخرى تكون أضلاع رباعي الأضلاع الخارجي غير متناسبة مع أضلاع رباعي الأضلاع الداخلي، وبالتالي فإن الشكلين غير متشابهين. ويصبح انعدام التشابه واضحاً في الإطارات قائمة الزاوية ذا الجوانب العريضة كما هو مبين على الشكل 89. فالنسبة بين الأضلاع الخارجية في الإطار الأيسر هي 1:2، أما بين الأضلاع الداخلية فهي 1:4. وفي الإطار الأيمن تكون النسبة بين الأضلاع الخارجية 3:4، وبين الأضلاع الداخلية 1:2 .

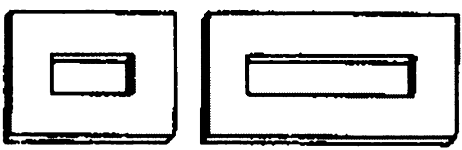
86- وسيفاجأ الكثيرون أنه عند حل هذه المسألة ستلزم معلومات من علم الفلك: عن المسافة ما بين الأرض والشمس، وعن مقدار قطر الشمس.

ويتحدد طول الظل الكامل الذي يولده الشكل في الفراغ بالرسم الهندسي المبين على الشكل 90. من السهل رؤية أن الظل أكبر من مقطع السلك بعدد المرات التي تكون فيها المسافة من الأرض حتى الشمس (150000000 كم) أكبر من مقطع الشمس (1400000 كم). والعلاقة الأخيرة ساوي بعدد مقرب، 115.

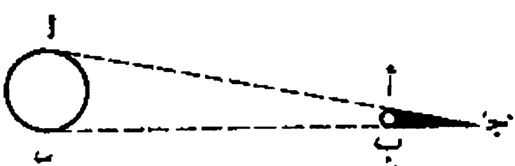
وهذا يعني أن طول الظل الكامل الذي يولده السلك في الفراغ يساوي:

4 × 115 = 460 مم = 46 سم

وتفسر القيمة الصغيرة لطول الظل الكامل بأنه لا يكون مرئياً على الأرض أو على جدران المنازل، أما الخطوط الخفيفة التي ترى فليست ظلالاً ولكن أشباه ظلال.



شكل 89



شكل 90

وقد أوردنا طريقة أخرى لحل مثل هذه المسائل عند بحث اللغز الثامن.

87- الإجابة بأن قالب الطوب الخاص باللعب يزن 1 كجم أي أقل بأربع مرات، تعتبر خطأً فاحشاً. إذ إن قالب الطوب الخاص باللعب ليس فقط أقصر بأربع مرات من الحقيقي ولكن أضيق أيضاً بأربع مرات وأقل ارتفاعاً بأربع مرات أيضاً، ولذلك فإن حجمه ووزنه أقل بمقدار 4 × 4 × 4 = 64 مرة. وبالتالي فإن الإجابة الصحيحة هي:

يزن قالب الطوب الخاص باللعب 4000 ÷ 64 = 62.5 جم.

88- أنت الآن مهيأ لأن تحل هذه المسألة حلاً صحيحاً. بما أن أشكال الجسم البشري متشابهة تقريباً فعندما يكون الإنسان أطول بمرتين فهو لا يكون ذا حجم مضاعف وإنما يكون حجمه أكبر بـ 8 مرات. وهذا يعني أن العملاق يزن أكثر من القزم بـ 8 مرات.

وأطول عملاق عرفت مقاييسه كان أحد سكان الألزاس. وكان طوله 275 سم أي أطول من الطول المتوسط للإنسان بمتر كامل. وأصغر قزم كان طوله أقل من 40 سم، أي كان أقصر من عملاق الألزاس بـ 7 مرات تقريباً. ولذلك إذا وضعنا على إحدى كفتي ميزان عملاق الألزاس فإنه يلزم للتوازن وضع 7 × 7 × 7 = 343 قزماً أي حشد كامل على الكفة الثانية.

89- حجم البطيخة الكبرى يزيد على حجم البطيخة الصغرى بمقدار:

$$\frac{125}{64} = 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4}$$

أي الضعف تقريباً. هذا يعني أن من الأربح شراء البطيخة الكبرى فهي أغلى بمرة ونصف فقط، أما المادة الصالحة للأكل فيها فأكثر بمرتين.

ولكن لماذا لا يطلب الباعة ثمناً لهذا البطيخ ضعف الثمن عادة وإنما أكثر منه بمرة ونصف فقط؟ يفسر هذا ببساطة بأن الباعة في أغلب الأحيان ضعفاء في الهندسة. وبالمناسبة فإن المشترين أيضاً ليسوا أقوياء في الهندسة، ولهذا نجدهم أغلب الأحيان يمتنعون عن إجراء صفقات رابحة. ويمكن القول بشجاعة أن من الأربح شراء البطيخ الكبير بالمقارنة مع البطيخ الصغير، ذلك لأنه يثمن عادة بأقل من ثمنه الحقيقي، ولكن أغلب المشترين لا يشكون في ذلك.

لنفس السبب يكون شراء البيض الكبير الحجم دائماً أربح من شراء البيض الصغير الحجم إذا لم تحدد أسعاره تبعاً للوزن.

90- العلاقة ما بين المحيطات كعلاقة الأقطار. إذا كان محيط شمامة يساوي 60 سم وشمامة أخرى 50 سم فإن النسبة ما بين قطريهما هي $50:60 = \frac{6}{5}$ وتكون النسبة ما بين حجميهما هي:

$$1.73 \approx \frac{216}{125} = {}^{3}\left(\frac{6}{5}\right)$$

ويكون ثمن الشمامة الكبرى تبعاً لحجمها (لوزنها) أكبر بـ 1.73 مرة بالنسبة إلى الشمامة الصغرى أو بتعبير آخر أغلى بمقدار 73٪ بينما يطلب ثمناً لها بـ 50٪ أكثر فقط. من الجلي أنه من الأربح شراؤها.

91- نرى من شروط المسألة أن قطر الكرزة أكبر بـ 3 مرات من قطر النواة. وهذا يعني أن حجم الكرزة أكبر من حجم النواة بـ $3 \times 3 \times 3$، أي بـ 27 مرة، ويبلغ حجم النواة $\frac{1}{27}$ من حجم الكرزة أما حجم الجزء القابل للأكل منها فيساوي $\frac{26}{27}$. وبالتالي فإن الجزء القابل للأكل من الكرزة أكبر من النواة حجماً بـ 26 مرة.

92- إذا كان النموذج أخف من الأصل بـ 8000000 مرة وصنع الاثنان من معدن واحد، فإن حجم النموذج يجب أن يكون أقل من حجم الأصل بـ 8000000 مرة. نحن نعرف أن أحجام الأشكال المتشابهة تكون متناسبة كمكعب الارتفاعات. وبالتالي فإن النموذج يجب أن يكون أقصر من الأصل بـ 200 مرة، لأن:

$$8000000 = 200 \times 200 \times 200$$

إن ارتفاع البرج الحقيقي يساوي 300 م. إذن فإن ارتفاع النموذج لا بد وأن يساوي:

$$300 \div 200 = 1\frac{1}{2} \text{ م}$$

أي أن النموذج سيكون بطول الإنسان تقريباً.

93- الوعاءان جسمان متشابهان هندسياً. فإذا كان الوعاء الأكبر أكثر سعة بـ 8 مرات لكانت كل مقاييسه الطولية أكبر بمرتين: أي أعلى بمرتين، وأوسع بمرتين في كلا الاتجاهين. ولكن بما أنه أعلى وأوسع بمرتين فإن سطحه أكبر بـ 2×2، أي بـ 4 مرات، لأن سطوح الأجسام المتشابهة تتناسب كمربعات الأبعاد الخطية. وعندما يكون سمك جدران الوعاء واحداً فإن وزنه يتوقف

على مقدار سطحه. من هنا نحصل على الجواب للسؤال الوارد في المسألة وهو: أن الوعاء الأكبر يكون أثقل من الأصغر **بأربع مرات**.

94- نرى من الوهلة الأولى أن هذه المسألة غير رياضية تماماً، وتحل في الواقع بنفس الطريقة الهندسية التي استخدمناها في المسألة السابقة.

قبل أن نبدأ الحل، لننظر مسألة شبيهة بهذه ولكنها أبسط.

لدينا قدران، أحدهما كبير والآخر صغير، مصنوعان من نفس المادة وبنفس الشكل، مملوءان بماء مغلٍ. أيهما سيبرد أولاً؟

تبرد الأشياء أساساً ابتداءً من السطح، وبالتالي سيبرد أولاً القدر الذي يكون سطحه في كل وحدة حجم أكبر: فإذا كان أحدهما أعلى وأعرض من الثاني ن من المرات فإن سطحه يكون أكبر بـ $ن^2$ مرة، أما حجمه فأكبر بـ $ن^3$ مرة. أي أنه يصيب وحدة السطح الواحدة في القدر الكبير حجم أكبر بـ ن مرة. وبالتالي يجب أن يبرد القدر الصغير أولاً.

لنفس السبب أيضاً لا بد وأن يبرد الطفل الذي يقف في البرد أكثر من الإنسان البالغ الذي يلبس نفس الملابس. لأن كمية الحرارة التي تنبعث في كل سنتيمتر مكعب من جسميهما واحدة تقريباً ولكن سطح الجسم الذي يبرد، لكل سنتيمتر مكعب، أكبر لدى الطفل منها لدى البالغ.

وينبغي أن نرى في ذلك أيضاً سبب أن أصابع اليد أو الأنف تبرد أشد وتتجمد أكثر من أجزاء الجسم الأخرى التي يكون سطحها ليس بهذا الكبر عند مقارنتها بحجمها.

وتنسب إلى ذلك أيضاً المسألة الآتية:

لماذا يشتعل العود أسرع من كتلة الحطب السميكة التي أخذ منها العود؟

بما أن التسخين يتم عن طريق السطح وينتشر إلى كل حجم الجسم فإنه يجب مقارنة سطح وحجم العود (وعلى سبيل المثال العود ذو المقطع الرباعي) مع سطح وحجم كتلة الحطب التي لها نفس الطول (وذات المقطع الرباعي أيضاً)، لكي نحدد مقدار سطح كل سنتيمتر مكعب من الخشب في الحالتين. فإذا كان سمك كتلة الحطب أكبر من سمك العود بـ 10 مرات، فإن السطح الجانبي لكتلة الحطب يكون أكبر من سطح العود أيضاً بـ 10 مرات، أما حجمه فيكون أكبر من حجم العود بـ 100 مرة. وبالتالي فإن مقدار حجم وحدة السطح في العود أصغر بعشر مرات من مقداره في كتلة الحطب: نفس كمية الحرارة تسخن في العود مادة أقل بعشر مرات، وهنا يكمن سبب اشتعال العود مبكراً إذا ما قورن بكتلة الحطب عندما يكون مصدر الحرارة واحداً. (نظراً لكون الخشب رديء التوصيل للحرارة فإنه يجب اعتبار هذه العلاقة مقربة جداً، إذ أنها تميز السريان العام للعملية فقط وليس الناحية الكمية لها).

10

هندسة المطر والثلج

95- مقياس المطر. جرت العادة على اعتبار لينينجراد مدينة كثيرة المطر، وأكثر مطراً بكثير من موسكو على سبيل المثال. ولكن للعلماء رأي آخر، فهم يؤكدون أن الأمطار في موسكو تأتي بماء أكثر في السنة بالمقارنة مع لينينجراد. فمن أين عرفوا ذلك؟ هل يمكن قياس كمية المياه التي تأتي بها الأمطار؟

يبدو أن هذه مسألة صعبة، وعلى الرغم من ذلك فأنت تستطيع أن تتعلم بنفسك القيام بمثل هذا الحساب للمطر. لا تظن أنه سيلزم لذلك جمع كل المياه التي يحملها المطر إلى الأرض. يكفي فقط قياس **سمك** طبقة المياه التي كانت ستتولد على الأرض فيما إذا لم تسيح المياه الساقطة ولم تمتصها الأرض. وليس من الصعب بتاتاً إجراء ذلك. فإن المطر عند هطوله يسقط على كل المنطقة بالتساوي. ولا يحدث أن يسقط ماء على جزء أكثر منه على الجزء المجاور. يكفي فقط لذلك قياس سمك طبقة ماء المطر على أي مساحة، وسنعرف سمكه على كل المساحة التي سقط عليها المطر.

والآن لا بد وأن تكون قد فطنت إلى ما يجب عمله لقياس سمك طبقة الماء التي يحملها المطر. يلزم لذلك إعداد ولو مساحة

صغيرة من الأرض لا يمتص فيها ماء المطر ولا يتدفق الماء بعيداً عنها. ويفيد لهذا الغرض أي وعاء مكشوف كالجردل مثلاً. فإذا كان لديك جردل ذو جدران عمودية (بحيث يكون الفاصل بين الجدران واحداً من أعلى ومن أسفل) فضعه تحت المطر في مكان مكشوف(*). وعند توقف المطر قس ارتفاع الماء الذي تجمع في الجردل - وسيكون لديك عندئذ كل ما هو مطلوب للحسابات.

ولنستخدم بصورة مسهبة أكثر «مقياس المياه» البسيط هذا. كيف نقيس ارتفاع مستوى الماء في الجردل؟ هل نضع في الماء مسطرة قياس؟ ولكن هذا يكون مريحاً فقط في حالة وجود ماء كثير في الجردل. وإذا ما كان سمك طبقته لا يزيد، كما يحدث عادة، عن 2-3 سم أو حتى بضعة مليمترات، فلا يمكن، طبعاً، قياس سمك الطبقة المائية بهذه الطريقة بأي قدر من الدقة. ومن المهم هنا قياس كل مليمتر حتى كل جزء عشري من المليمتر. فما العمل؟

إن أفضل شيء هو أن نسكب الماء في إناء زجاجي أكثر ضيقاً. وسيصل الماء في مثل هذا الإناء إلى مستوى أعلى، ومن السهل رؤية ارتفاع المستوى خلال الجدران الشفافة. أنت تفهم أن ارتفاع الماء المقاس في الإناء الضيق ليس هو سمك الطبقة المائية التي يلزمنا قياسها. ولكن من السهل تحويل قياس إلى آخر. فلتفرض أن قطر قاع الإناء الضيق هو أقل بعشر مرات من قطر قاع الجردل المستخدم لقياس المطر. ومساحة القاع ستكون عندئذ أقل من مساحة قاع

(*) ضع الجردل في مكان عالٍ عن الأرض حتى لا يقع فيه رذاذ الماء الناجم عن اصطدام المطر بالأرض.

الجردل بـ 10 × 10 أي بـ 100 مرة. ومن المفهوم أن الماء المسكوب من الجردل يجب أن يكون في الإناء الزجاجي أعلى بـ 100 مرة. وهذا يعني أنه إذا كان سمك طبقة ماء المطر في الجردل 2 مم فإنه في الإناء الضيق سيكون نفس الماء على مستوى 200 مم أي 20 سم.

وأنت ترى من هذا الحساب أن الإناء الزجاجي بالمقارنة بالجردل - مقياس المطر لا يجب أن يكون ضيقاً جداً، وإلا للزم الأمر أن يكون مرتفعاً جداً. ويكفي تماماً أن يكون الإناء الزجاجي أضيق من الجردل بـ 5 مرات، عندئذ تكون مساحة قاعه أقل بـ 25 مرة من مساحة قاع الجردل، ويرتفع مستوى الماء المسكوب بمثل عدد هذه المرات. وسيقابل كل مليمتر من سمك الطبقة المائية في الجردل 25 مم من ارتفاع الماء في الإناء الضيق. لذا فمن المستحسن لهذا السبب لصق شريط من الورق على الجدار الخارجي للإناء الزجاجي وترسم عليه تقسيمات كل 25 مم، وتأشيرها بالأرقام 1، 2، 3، ...إلخ. عندئذ تستطيع مباشرة بالنظر إلى ارتفاع الماء في الإناء الضيق معرفة سمك طبقة الماء في الجردل - مقياس المطر دون أي حسابات. إذا كان قطر مقطع الإناء الضيق أقل من مقطع الجردل لا بـ 5، ولكن لنقل بـ 4 مرات فيلزم رسم التقسيمات على الجانب الزجاجي كل 16 مم...إلخ.

ولا يناسب بتاتاً أن نسكب الماء في إناء القياس الضيق من الجردل عبر الحافة. من المستحسن أن نصنع في جدار الجردل ثقباً مستديراً صغيراً ونضع فيه أنبوبة زجاجية ذات سدادة. ومن المناسب أكثر سكب الماء خلاله.

وهكذا يتوفر لديك جهاز لقياس سمك طبقة مياه المطر. وبالطبع فإن الجردل وإناء القياس البسيط لا يحسبان بدقة مياه المطر كمقياس المطر الحقيقي وقدح القياس الحقيقي اللذين يستخدمان في محطات الأرصاد الجوية. ولكن أجهزتك الرخيصة البسيطة يمكن أن تساعدك في إجراء كثير من الحسابات ذات الدلالة.

وسننتقل الآن إلى هذه الحسابات.

96- ما هي كمية الأمطار؟ افرض أنه يوجد بستان خضار، طوله 40 م وعرضه 24 م. هطل المطر، وتريد أن تعرف كمية الماء التي تساقطت على البستان. كيف تحسب ذلك؟

لا بد من البدء، طبعاً، من تحديد سمك طبقة مياه المطر: بدون هذا الرقم لا يمكن عمل أي حسابات. لنفرض أن مقياس المطر البسيط الذي لديك يبين أن المطر قد سقط بطبقة سمكها 4 مم. سنحسب كم عدد السنتيمترات المكعبة من الماء كانت تتبقى في كل متر مربع من البستان لو لم تمتص الأرض المياه. علماً أن عرض المتر المربع 100 سم وطوله 100 سم، وتغطيه طبقة من الماء سمكها 4 مم، أي 0.4 سم. هذا يعني أن حجم طبقة الماء هذه يساوي:

$$100 \times 100 \times 0.4 = 4000 \text{ سم}^3$$

أنت تعرف أن 1 سم^3 من الماء يزن 1 جم. إذن فقد تساقط على كل متر مربع من البستان 4000 جم من ماء المطر، أي 4 كجم. ولكن مساحة البستان كله تبلغ $40 \times 24 = 960$ م^2. وهذا يعني أنه بسقوط المطر انسكب على البستان $4 \times 960 = 3840$ كجم من الماء، أي ما لا يقل عن 4 أطنان.

وللإيضاح احسب أيضاً عدد جرادل المياه الواجب حملها إلى البستان لإروائه بنفس كمية المياه التي حملها إليه المطر. فإذا علمنا أن الجردل العادي يتسع لحوالي 12 كجم من المياه، إذن فإن المطر قد أسقط 3840 ÷ 12 = 320 جردلاً من الماء.

وهكذا كان يلزم أن تروي البستان بأكثر من 300 جردل ماء لكي تحل محل ما رواه به المطر الذي هطل لمدة تقرب من الربع ساعة.

كيف يتمثل بالأعداد المطر الشديد والضعيف؟ يلزم لذلك تحديد عدد مليمترات المياه (أي الطبقة المائية) التي تتساقط في **دقيقة واحدة** من هطول المطر وهو ما يسمى بـ «قوة الأمطار». إذا كان المطر يسقط 2 مم في المتوسط **كل دقيقة**، فإن هذا يؤلف وابلاً شديداً للغاية من المطر. أما عندما يتساقط رذاذ مطر خريفي بسيط فإن 1 مم من الماء يتجمع خلال ساعة كاملة أو أكثر.

وكما ترى فإن حساب كمية المياه التي تسقطها الأمطار ليس أمراً ممكناً فقط ولكنه حتى غير معقد بتاتاً. علاوة على ذلك فإنك كنت تستطيع إذا أردت أن تحدد بالتقريب حتى عدد النقط المنفردة التي يسقطها المطر. وفعلاً فعند هطول المطر العادي تزن القطرات في المتوسط بحيث يعادل وزن كل 12 قطرة 1 جم. وهذا يعني أنه تسقط على كل متر مربع من البستان عندما تكون كمية المطر المذكورة واحدة 4000 × 12 = 48000 قطرة.

من السهولة بعد ذلك حساب عدد القطرات التي سقطت على كل البستان. ولكن حساب عدد القطرات هي عملية حب

استطلاع فقط وليس منها منفعة. ولقد أوردنا هذا الحساب فقط لكي نبين أي الحسابات التي تبدو للوهلة الأولى مستحيلة يمكن إجراؤها إذا ما عرفنا كيفية القيام بها.

97- ما هي كمية الثلج؟ لقد تعلمنا قياس كمية المياه التي يحملها المطر. فكيف يمكن قياس كمية المياه الناتجة عن سقوط البرد؟ بنفس هذه الطريقة تماماً. يسقط البرد في مقياس المطر ويذوب ثم تقيس الماء المتكون من البرد وتحصل على ما تريد.

لكن الماء الذي يحمله الثلج يقاس. ولو اتبعنا نفس الطريقة السابقة في قياس المطر لكنا قد حصلنا على نتائج غير دقيقة تماماً، لأن الثلج الذي يسقط في الجردل يتطاير منه بسبب الرياح. ولكن عند حساب الماء المتكون من الثلج يمكن أن نقوم بذلك بدون مقياس المطر: فيقاس مباشرة سمك طبقة الثلج التي تغطي الفناء أو الحديقة أو الحقل بواسطة عصا من الخشب (قضيب مساح). ولمعرفة سمك طبقة الماء الناتجة عن ذوبان هذا الثلج يلزم القيام بالتجربة التالية: يملأ جردل بالثلج بنفس الرخاوة وندعه يذوب ونلاحظ ارتفاع طبقة الماء المتكونة. بهذه الطريقة نستطيع تحديد كم من المليمترات يكون ارتفاع طبقة الماء المتكونة من كل سنتيمتر من طبقة الثلج. وبمعرفة هذا يسهل عليك أن تحول سمك الطبقة الثلجية إلى سمك مائي...

وإذا ما أجريت كل يوم وبلا تخلف قياس كمية مياه المطر طيلة أوقات السنة الدافئة وتضيف إلى ذلك المياه المحفوظة خلال الشتاء بشكل ثلج فإنك ستعرف الكمية الكلية من الماء التي تسقط في منطقتك. وهذه نتيجة هامة جداً لتحديد كمية الأمطار التي

تسقط في المنطقة قيد البحث. (وتسمى بـ «الأمطار» كل المياه الساقطة عموماً، إن كانت على شكل مطر أو برد أو ثلج...إلخ).

وإليكم متوسط كمية الأمطار الساقطة كل عام في مدن الاتحاد السوفييتي المختلفة:

لينجراد	47 سم	استراخان	14 سم
فولوجدا	45 سم	كوتائيسي	179 سم
ارخانجلسك	41 سم	باكو	24 سم
موسكو	55 سم	سفردلوفسك	36 سم
كاستروما	49 سم	تابولسك	43 سم
كازان	44 سم	سيميبالاتينسك	21 سم
كويبيشيف	39 سم	الما - اتا	51 سم
تشكالوف	43 سم	طشقند	31 سم
أوديسا	40 سم	ينيسيسك	39 سم
اركوتسك	44 سم		

من بين كل المدن المذكورة يكون نصيب كوتائيسي من الماء الساقط من السماء أكثر من الأماكن الأخرى (179 سم)، وأقلها استراخان (14 سم)، أي بمقدار 13 مرة أقل من كوتائيسي. ولكن توجد أماكن على الكرة الأرضية تسقط فيها كمية أكبر بكثير من المياه بالمقارنة مع كوتائيسي. فمثلاً يوجد مكان في الهند تغمره مياه الأمطار تماماً، إذ يسقط هناك في العام 1260 سم، أي $12\frac{1}{2}$ م! وحدث مرة أن سقط هناك خلال يوم واحد أكثر من 100 سم من المياه. بينما توجد، على العكس، أماكن تسقط فيها كمية من المطر أقل

بكثير مما في استراخان: ففي إحدى مناطق أمريكا الجنوبية، في شيلي، لا يصل مجموع ما يتساقط خلال عام كامل 1 سم من الأمطار.

إن المنطقة التي يسقط فيها أقل من 25 سم من الأمطار في العام تعتبر من المناطق الجافة. لا يمكن في هذه الأماكن زراعة الحبوب بدون إجراء الري الصناعي.

وإذا لم تكن تقطن في إحدى المدن التي ذكرناها في الجدول السابق فينبغي عليك أن تقيس بنفسك كمية الأمطار الساقطة في منطقتك. فتقوم بإجراء القياسات بصبر على مدار السنة، وتعرف كمية المياه التي يحملها كل مطر أو برد وكمية المياه المختزنة في الثلج، وبالنتيجة تحصل على فكرة عن الموقع الذي تحتله مدينتك، من حيث نسبة الرطوبة بين المدن الأخرى.

ومن السهل أن تفهم أنه بقياس كمية المياه التي تسقط في العام في أماكن مختلفة من الكرة الأرضية، يـ ـك من هذه الأرقام معرفة طبقة المياه التي تسقط في المتوسط خلال عام على كل الأرض عموماً. وقد تبين أن متوسط كمية الأمطار الساقطة على اليابسة (دون حساب كميتها فوق المحيطات) خلال العام هي 78 سم. ويعتقد أنه تسقط فوق مساحة معينة من المحيطات نفس كمية الأمطار تقريباً التي تسقط على مساحة مساوية من اليابسة. ومن السهل حساب كمية المياه التي تسقط على كل كوكبنا سنوياً عن طريق المطر والبرد والثلج...إلخ. ولكن يجب من أجل ذلك معرفة مقدار سطح الكرة الأرضية. وإذا لم يتوفر لديك المصدر لمعرفة هذا العدد فيمكنك أن تسحبه بنفسك بالطريقة الآتية:

أنت تعرف أن المتر يؤلف بدقة تقريباً 40 جزءاً من مليون من محيط الكرة الأرضية. أو بتعبير آخر أن محيط الأرض يساوي 40000000 م أي 40000 كم. ومقطع أي دائرة يكون أصغر بمقدار $3\frac{1}{7}$ مرة تقريباً من محيطها. وبمعرفة هذا يمكن أن نجد قطر كوكبنا:

$$40000 \div 3\frac{1}{7} \approx 12700$$ كم

إن قاعدة حساب سطح أي كرة هي كالآتي: يلزم ضرب القطر في نفسه وفي $3\frac{1}{7}$:

$$12700 \times 12700 \times 3\frac{1}{7} \approx 509000000$$ كم^2

(ابتداءً من الرقم الرابع للنتيجة نكتب أصفار لأن المؤكد منها الثلاثة أرقام الأولى فقط).

وهكذا فإن مجموع سطح الكرة الأرضية يساوي 509 ملايين كيلومتر مربع.

لنعد الآن ثانية إلى مسألتنا. سنحسب كم من المياه تسقط على كل كيلومتر مربع واحد من سطح الأرض. يسقط على المتر المربع الواحد أو على 10000 سم^2 :

$$78 \times 10000 = 780000$$ سم^3

وبما أنه في الكيلومتر المربع $1000 \times 1000 = 1000000$ م^2 . إذن يسقط عليه من الماء:

780000000000 سم^3 أو 780000 م^3

ويسقط على كل سطح الأرض:

$$780000 \times 509000000 = 397000000000000 \text{ م}^3$$

ولتحويل هذا العدد من أمتار مكعبة إلى كيلومترات مكعبة يلزم أن نقسم النتيجة على $1000 \times 1000 \times 1000$ أي على مليار. فنحصل على 397000 كم^3.

وهكذا يسقط من السماء على سطح كوكبنا في كل عام حوالي 400000 كم^3 من الماء.

بذلك ننهي حديثنا عن هندسة المطر والثلج. ويمكن الاطلاع على كل ما تحدثنا عنه هنا بصورة تفصيلية أكبر بالرجوع إلى كتب الأرصاد الجوية.

11

الرياضيات وأسطورة الطوفان

98- أسطورة الطوفان. نجد بين الأساطير الخيالية الكثيرة الواردة في الكتب القديمة أسطورة تقول إن العالم كله قد غرق في غابر الأزمان بفعل أمطار كانت أعلى من أعلى الجبال. وحسب ما يرد في هذه الكتب فإن الرب قد «ندم مرة على أنه خلق الإنسان على الأرض» وقال:

- سأهلك البشر الذين خلقتهم على سطح الأرض (أي على سطح الكرة الأرضية): من البشر حتى المواشي، والزواحف والطيور السماوية سأهلكها (كلها).

وكان الإنسان الوحيد الذي أراد الله أن يرحمه عندئذ، هو التقي نوح ولذلك فقد حذره الرب مما يجري من تحضيرات لهلاك العالم وأمر ببناء سفينة كبيرة (وسمي في الكتب القديمة بـ «الفلك») بالمقاييس الآتية: «طول الفلك: 300 ذراع، عرضه: 50 ذراعاً، وارتفاعه: 30 ذراعاً» وكان الفلك يتألف من ثلاثة طوابق. وكان يجب أن ينجو على هذه السفينة ليس نوح فقط مع أسرته وأسر أبنائه البالغين، ولكن كل أصناف الحيوانات على الأرض. وأصدر الرب

أمره إلى نوح أن يأخذ في الفلك زوجاً واحداً من كل أصناف هذه الحيوانات مع احتياطي من المأكولات لها لمدة طويلة.

واختار الرب الفيضان الناجم عن الأمطار كوسيلة لإهلاك كل ما هو حي على اليابسة. ووجب على الماء أن يقضي على كل الناس وكل أصناف الحيوانات التي تعيش على الأرض. بعد ذلك يجب أن تظهر من نوح ومن الحيوانات التي أُنقِذت معه سلالة إنسانية جديدة وعالم حيواني جديد.

ويذكر في الكتب القديمة أنه «بعد سبعة أيام جاءت مياه الفيضان إلى الأرض... وهطلت الأمطار على الأرض طيلة 40 يوماً و40 ليلة... وتزايدت المياه ورفعت الفلك وطاف فوق الماء... وازدادت المياه فوق الأرض بصورة خارقة بحيث تغطت كل الجبال العالية التي توجد تحت السماء وارتفعت فوقها بمقدار 15 ذراعاً... فهلك كل ما كان موجوداً على سطح الأرض. بقي نوح فقط وما كان معه في الفلك». وتروي الأسطورة أن المياه بقيت على الأرض مدة 110 أيام أخرى، وبعد ذلك اختفت، وغادر نوح الفلك ومعه كل الأحياء التي أُنقِذت، لكي يعمِّر مرة أخرى الأرض الخالية.

سنضع سؤالين بشأن هذه الأسطورة:

1) هل كان من الممكن حدوث مثل هذا السيل الذي غطى الكرة الأرضية كلها بأعلى من أعلى الجبال؟

2) هل كان يستطيع فلك نوح أن يتسع لكل أصناف حيوانات الأرض؟

99- هل كان حدوث الطوفان ممكناً؟ تقدم الرياضيات الأجوبة على هذا السؤال وغيره أيضاً.

ومن أين أمكن أن تأتي المياه التي سقطت مع أمطار الطوفان؟ بالطبع من الجو فقط. وإلى أين ذهبت بعد ذلك؟ إن التربة ما كانت لتستطيع امتصاص محيط عالمي كامل كما أنها ما كانت، بلا ريب، لتستطيع مغادرة كوكبنا أيضاً. والمكان الوحيد الذي أمكن أن تذهب إليه كل هذه المياه هو المحيط الجوي للأرض: حيث إن ماء الفيضان كان يمكن أن يتبخر فقط ويتحول إلى غشاء هوائي للأرض. وهناك لا بد وأن تظل هذه المياه إلى الآن. إذن، لو أن كل بخار الماء الموجود الآن في الجو قد تحول إلى ماء وسقط على الأرض فإنه لكان من الممكن حدوث طوفان مرة أخرى، ولغطت المياه أعلى الجبال. فلنراجع هل هذا صحيح.

نبحث في كتاب عن الأرصاد الجوية عن كمية الرطوبة الموجودة في المحيط الجوي الأرضي. سنعرف أن عمود الهواء الذي يرتكز على متر مربع يحتوي في المتوسط على 16 كجم من بخار الماء، ولا يمكن أن يحتوي أبداً على أكثر من 25 كجم. سنحسب إذن سمك الطبقة المائية التي تتكون لو سقط على الأرض كل هذا البخار بشكل مطر. إن 25 كجم أي 25000 جم من الماء تشغل حجماً قدره 25000 سم^3. وهذا هو حجم الطبقة التي مساحتها 1 م^2 أي 100 × 100 أو 10000 سم^2. وبقسمة الحجم على مساحة القاعدة نحصل على سمك الطبقة وهو:

$$25000 \div 10000 = 2.5 \text{ سم}$$

إن الطوفان ما كان ليرتفع أعلى من 2.5 سم عن سطح الأرض لأنه لا يوجد ماء(*) آخر في المحيط الجوي. كما أن هذا الارتفاع من الماء كان سيتحقق فقط في حالة عدم امتصاص الأرض للمطر الساقط أبداً.

إن الحساب الذي أجريناه يظهر أن ارتفاع الماء الذي كان ممكناً عند حدوث الطوفان، إن كانت مثل هذه الكارثة قد حدثت فعلاً، هو 2.5 سم. وهذا الرقم لا يمكن مقارنته بالمسافة إلى قمة أعلى الجبال وهو إيفرست والتي يبلغ ارتفاعها 9كم. إن ارتفاع الفيضان مضخم في الأسطورة القديمة بما لا يقل عن 360000 مرة!

وهكذا فلو كان الطوفان العظيم المطري قد حدث فعلاً فإن هذا لما كان فيضاناً أبداً، بل مطراً ضعيفاً جداً، لأنه كان سيعطي خلال 40 يوماً من السقوط المستمر كمية من المياه ارتفاعها 25 مم فقط، أي أقل من نصف مليمتر في اليوم. والمطر الخريفي الضعيف، الذي يسقط طيلة يوم واحد، يعطي ماء يزيد عن ذلك بـ 20 مرة.

100- هل يمكن بناء فلك نوح؟ والآن لنبحث السؤال الثاني. هل كان من الممكن أن يسع فلك نوح كل أصناف الحيوانات الموجودة على الأرض؟

(*) لا يسقط في كثير من مناطق الكرة الأرضية في مرة واحدة أكثر من 2.5 سم من الأمطار، وهي لا تنتج فقط من الهواء الموجود فوق هذه المنطقة ولكن من هواء الأماكن المجاورة الذي يأتي إلى هذا المكان مع الرياح. أما الطوفان العظيم فقد حدث في نفس الوقت على كل سطح الأرض، ولم تستطع أية منطقة أن تستعير الرطوبة من مكان آخر.

فلنحسب «مساحة السكن» في الفلك. فتبعاً للأسطورة القديمة كان الفلك مؤلفاً من ثلاثة طوابق. وكانت أبعاد كل طابق كالآتي: 300 ذراع في الطول و50 ذراعاً في العرض. علماً بأن «الذراع» عند الشعوب القديمة لآسيا الغربية كان وحدة قياس تساوي تقريباً 45 سم أو 0.45 م، وهذا يعني أنه بمقاييسنا تكون أبعاد كل طابق في الفلك كالآتي:

الطول: $300 \times 0.45 = 135$ م

العرض: $50 \times 0.45 = 22.5$ م

ومساحة الأرضية: $135 \times 22.5 \approx 3040$ م^2.

إذن، إن «مساحة السكن» الكلية لكل الطوابق الثلاثة في فلك نوح تساوي:

$3040 \times 3 = 9120$م^2

هل تكفي هذه المساحة لوضع حتى كل أصناف الحيوانات الثديية الموجودة على الكرة الأرضية؟ إن عدد الأصناف المختلفة للحيوانات الثديية يساوي حوالي 3500. كان على نوح أن يعطي مكاناً لا للحيوان نفسه فقط ولكن أيضاً لاحتياطي العلف له لمدة 150 يوماً وهي مدة الطوفان. وأما للحيوانات المفترسة فكان يلزم وجود مكان لها ومكان للحيوانات التي تتغذى بها، وكذلك لعلف هذه الحيوانات. بينما لم يكن في الفلك في المتوسط لكل زوج من الحيوانات الجاري إنقاذها سوى:

$\frac{9120}{3500} = 2.6$ م^2

من الواضح أن هذا «المعدل المعيشي» ما كان ليكفي، وبالأخص إذا أخذنا بعين الاعتبار أن جزءاً من المكان كانت تشغله عائلة نوح الكثيرة الأفراد، وأنه بالإضافة إلى ذلك كان يلزم ترك ممر بين الأقفاص.

ولكن وجب على نوح أن يجد المأوى في الفلك بالإضافة إلى الحيوانات الثديية لأنواع أخرى من الحيوانات الأرض، غير الكبيرة جداً، ولكنها أكثر تنوعاً. وعددها، تقريباً، هو:

الطيور 13000

الزواحف 3500

البرمائيات 1400

العنكبوتيات 16000

الحشرات 360000

علماً بأن المكان كان ضيقاً بالنسبة للحيوانات الثديية في الفلك، فما الحال بالنسبة لهذه الحيوانات، إنه ما كان ليكفيها بتاتاً. ووجب ليتسع الفلك لكل أنواع الحيوانات الأرضية، أن يكون أكبر بعدد كبير من المرات. ومع ذلك فبالمقاييس المبينة في الكتب القديمة فإن الفلك كان عبارة عن سفينة ضخمة جداً تبلغ «حمولتها»، على حد تعبير البحارة، 20000 طن. وليس من المحتمل أبداً أن يستطيع البشر في تلك الأزمنة الغابرة، حيث كان تكنيك بناء السفن لا يزال في فترة الطفولة، بناء سفينة بهذه المقاييس. وعلى الرغم من ذلك فإن الفلك كان غير كبير بدرجة كافية لتحقيق الغرض الذي نسبته إليه الأسطورة القديمة. ولوجب على الفلك أن يكون حديقة حيوان كاملة مع احتياطي من العلف يكفي لمدة 5 أشهر.

باختصار إن الأسطورة القديمة عن الطوفان العظيم لا تتفق مع الحسابات الرياضية البسيطة لدرجة أنه من الصعب أن نجد فيها حتى جزءاً صغيراً من أي شيء يطابق الواقع. وأغلب الظن أنها استوحيت من فيضان محلي، أما الباقي فهو من ابتداع الخيال الشرقي الغني.

12

ثلاثون مسألة مختلفة

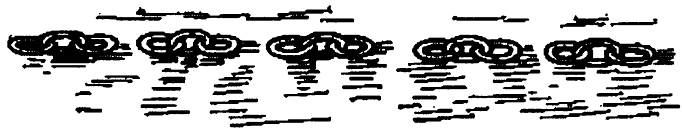
آمل أن لا تمرر مطالعة القارئ لهذا الكتاب دون أن تترك فيه أثراً، وأن لا يقتصر الأمر على الترفيه عنه فقط، بل أكسبته المنفعة بتنمية فطنته وسرعة خاطره، وعلمته أن يستغل معارفه بمقدرة أفضل. ومن المحتمل أن القارئ نفسه يريد الآن أن يختبر فراسته على أي شيء. من أجل ذلك خصصت هذه الثلاثون مسألة المتنوعة والموضوعة هنا في آخر باب من كتابنا.

101- السلسلة. أحضر إلى الحداد 5 قطع من سلسلة توجد 3 حلقات في كل قطعة، وطلب توصيلها في سلسلة واحدة.

أخذ الحداد يفكر قبل أن يبدأ العمل كم حلقة يلزم أن تفتح ثم تقفل بعد ذلك. وقرر أنه سيلزم فتح وقفل أربع حلقات.

لكن، هل يمكن تنفيذ العمل بفتح وقفل عدد أقل من الحلقات؟

102- العناكب والخنافس. جمع طفل في علبة عناكب وخنافس مجموعها 8. لو عددنا عدد الأرجل في العلبة لظهر أنها 54 رجلاً.



شكل 91. خمسة قطع من السلسلة

كم هو عدد العناكب والخنافس في العلبة؟

103- معطف المطر، والقبعة، والجرموق (الكالوش). اشترى أحدهم معطف مطر وقبعة وجرموق ودفع مقابلها 20 روبلاً. فإذا علم أن ثمن معطف المطر أكبر بـ 9 روبلات من ثمن القبعة، ومجموع ثمن القبعة ومعطف المطر معاً يزيد 16 روبلاً على ثمن الجرموق. كم يساوي ثمن كل واحد منها؟

المطلوب حل المسألة شفوياً وبدون معادلات.

104- بيض الدجاج والبط. لدينا سلات فيها بيض، وكان في بعض السلات بيض دجاج، وفي البعض الآخر بيض بط وعددها 5، 6، 12، 14، 23، 29. وقد فكر البائع مع نفسه قائلاً: «لو أنني بعت هذه السلة فسيبقى لدى بيض دجاج أكثر بالضعف من بيض البط».

أية سلة كان يقصدها البائع؟

105- الطيران. تقطع الطائرة المسافة من مدينة أ إلى مدينة ب في ساعة واحدة و20 دقيقة. ولكن الطيران العكسي يتم في 80 دقيقة. كيف تفسر ذلك؟

106- الهدايا النقدية. أعطى أحد الآباء لابنه 150 روبلاً وأعطى أب آخر لابنه 100 روبل. ولكن اتضح أن كلا الابنين معاً قد زادا من رأسمالهما بـ 150 روبلاً فقط. كيف تعلل ذلك؟

107- قطعتان من لعبة الداما. يجب أن توضع على لوحة لعبة الداما الخالية قطعتا داما مختلفتا اللون. ما عدد الأوضاع المختلفة التي يمكن أن يتخذاها على اللوحة؟

108- برقمين. ما هو أقل عدد موجب صحيح يمكن أن تكتبه برقمين؟

109- الواحد. عبر عن رقم 1 باستعمال كل الأرقام العشرة.

110- بخمس تسعات. عبر عن الرقم 10 بخمس تسعات. اذكر طريقتين لذلك على أقل تقدير.

111- بعشرة أرقام. عبر عن الرقم 100 باستخدام كل الأرقام العشرة. بكم طريقة تستطيع أن تفعل ذلك؟ وتوجد هناك على الأقل أربع طرق.

112- بأربع طرق. عبر عن الرقم 100 بواسطة خمسة أرقام متساوية وبأربع طرق مختلفة.

113- بأربع آحاد. ما هو أكبر عدد يمكن كتابته بأربع آحاد؟

114- القسمة الغامضة. في المثال التالي للقسمة استبدلت كافة الأرقام بنجوم عدا أربع أربعات. ضع بدلاً من النجوم تلك الأرقام التي استبدلت النجوم بها:

```
 ******4 |          *
-        |
    ***  |
 --------
   **4*
-
   ****
 --------
   ****
-
    *4*
 --------
   ****
-
   ****
 --------
```

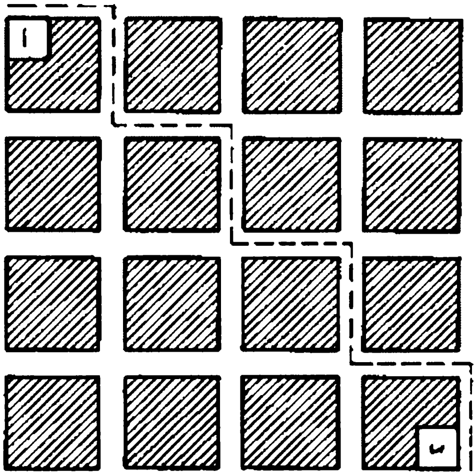
وهذه المسألة عدة حلول مختلفة.

115- حالة أخرى للقسمة. اعمل نفس الشيء مع مثال آخر تركت فيه سبع سبعات فقط:

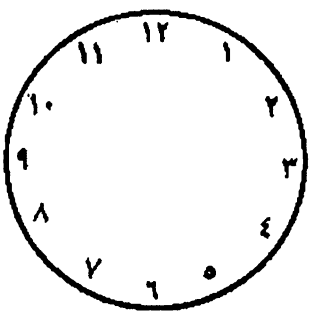
```
**7******* |          *
-          |
  ******   |
 ----------
  *****7*
-
  *******
 ----------
   *7****
-
   *7****
 ----------
  *******
-
  ****7**
 ----------
   ******
-
   ******
 ----------
```

116- ما الذي سينتج؟ تصور في ذهنك لأي طول سيمتد الشريط، المكون من كل المربعات المليمترية لمتر واحد مربع، على أن تكون موضوعة واحدة ملاصقة للأخرى.

117- بنفس الطريقة. تصور في ذهنك لأي ارتفاع يرتفع العمود، المتكون من كل المكعبات المليمترية لمتر مكعب واحد، موضوعة واحدة فوق الأخرى.



شكل 92. البيت الصيفي في الغابة مقسم بواسطة ممرات



شكل 93. يلزم تقطيع قرص الساعة هذا إلى 6 أجزاء

118- الطائرة. طائرة يبلغ طول باع جناحيها 12 م، التقطت لها صورة من الأسفل أثناء تحليقها عندما مرت عمودياً فوق جهاز التصوير. ارتفاع آلة التصوير 12 سم قياس الصورة 8 مم.

على أي ارتفاع كانت تحلق الطائرة في وقت التصوير؟

119- مليون من القطع المنتجة. تزن القطعة المنتجة 89.4 جم. تصور في ذهنك كم تزن مليون قطعة من هذه القطع.

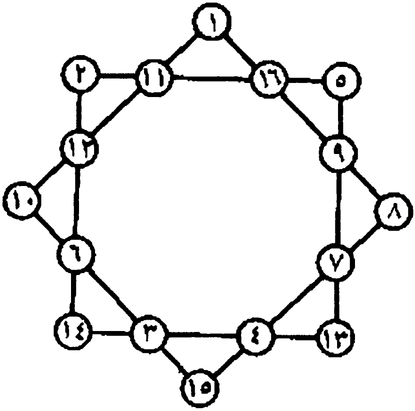
120- عدد الطرق. ترى على الشكل 92 بيتاً صيفياً في الغابة. وتقسمه الممرات إلى أقسام مربعة. ويبين الخط المتقطع الطريق المؤدي عبر الممرات من نقطة أ إلى نقطة ب. وهذا، بالطبع ليس الطريق الوحيد ما بين النقطتين المبينتين خلال الممرات. ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكنك أن توصلها ما بين النقطتين شرط أن تكون ذات طول واحد؟

121- قرص الساعة. يلزم تقسيم قرص الساعة هذا (شكل 93) إلى 6 أجزاء ذات أي شكل - بحيث يكون مجموع الأعداد، على كل جزء، واحداً في كل حالة.

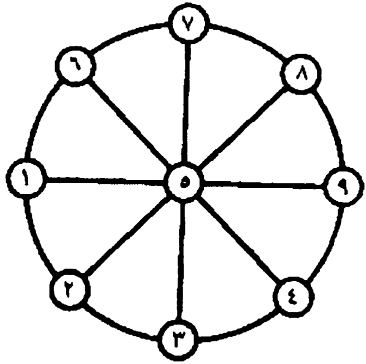
وهدف المسألة هو اختبار مدى حضور بديهيتك أكثر من أن يكون اختباراً لفطنتك.

122- النجمة ذات الرؤوس الثمانية. يلزم وضع الأعداد من 1 حتى 16 في نقط تقاطع خطوط الشكل المبين على الشكل 94 بحيث يكون مجموع الأعداد على كل ضلع من أضلاع المربع يساوي 34 وأن يكون مجموع الأعداد التي على رؤوس كل مربع 34 أيضاً.

123- العجلة العددية. يلزم وضع الأعداد من 1 حتى 9 بالوضع المبين على الشكل 95، بحيث يكون أحد الأرقام في وسط الدائرة أما الأرقام الأخرى فتكون في نهاية كل قطر، وبحيث يكون مجموع كل ثلاثة أرقام في كل صف يساوي 15.

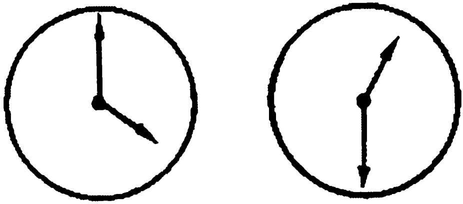


شكل 94. النجمة ذات الرؤوس الثمانية

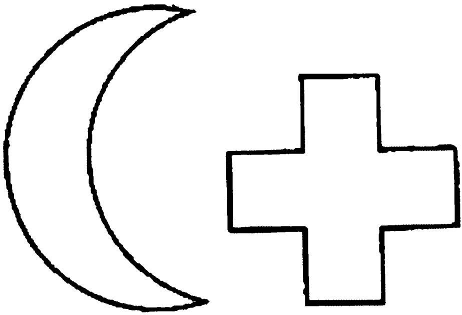


شكل 95. العجلة العددية

124- المنضدة ذات الأرجل الثلاثة. يوجد رأي مفاده أن المنضدة ذات الأرجل الثلاثة لا تتأرجح أبداً حتى لو كانت الأرجل غير متساوية الطول. أصحيح هذا أم لا؟



شكل 96. ما هي قيمة الزوايا التي يصنعها عقربا الساعة



شكل 97. كيف يمكن تحويل الهلال إلى صليب

125- أي الزوايا؟ أي الزوايا تتكون ما بين عقارب الساعة على الشكل 96؟ يجب الإجابة تبعاً للإدراك، وبدون استخدام المنقلة.

126- على خط الاستواء. لو أننا استطعنا أن نمشي حول الكرة الأرضية على خط الاستواء، فإن قمة رأسنا سترسم طريقاً أطول من أي نقطة من نقط أقدامنا.

ما مقدار هذا الفرق؟

127- في ستة صفوف. ربما تعرف القصة الهزلية التي تدور حول تسعة أجياد وضعت في عشرة مرابط فأصبح في كل مربط جواد. المسألة التي سنقدمها الآن شبيهة بهذه الفكاهة المشهورة، ولكن لها حل واقعي جداً وليس خيالياً. وهي كالآتي:

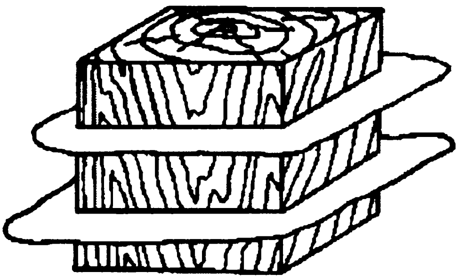
رتب 25 شخصاً في 6 صفوف بحيث يكون في كل صف 5 أشخاص.

128- الصليب والهلال. مبين على الشكل 97 شكل هلال (إذا ما توخينا الدقة في التعبير فهذا ليس هلالاً إذ إن شكل الهلال هو نصف دائرة أما هذا فبشكل منجل) متكون من قوسي دائرتين. المطلوب رسم إشارة الصليب الأحمر الذي تكون مساحته هندسياً مساوية تماماً لمساحة الهلال.

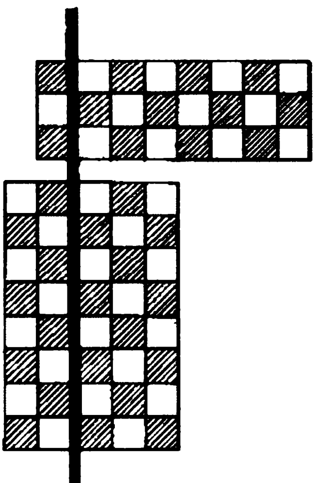
129- مقطع المكعب. يوجد لديك مكعب طول ضلعه 3 سم. وحجمه 27 سم^3. ويمكن قطع هذا المكعب إلى 27 مكعباً صغيراً طول ضلع كل منها يساوي 1 سم. من السهل جداً القيام بذلك بقطع المكعب بواسطة ستة مستويات: يلزم توصيل مستويين موازيين لأحد الجوانب، واثنين موازيين للجانب الآخر، ومستويين موازيين للجانب الثالث. لكن تصور أنه بعد كل قطع يسمح لك بتحريك الأجزاء في الفراغ: بقطع جزء معين تستطيع أن تضعه على الأجزاء الأخرى بحيث يتقاطع المستوى القاطع التالي معه جميعاً. ألا تستطيع، باستخدام هذه الإمكانية الإضافية الهامة، تقليل عدد المستويات القاطعة التي تقسم المكعب إلى 27 مكعباً صغيراً؟

130- قطع آخر. المسألة التالية شبيهة بالسابقة ولكن في شكل آخر. المطلوب تقطيع لوحة الشطرنج العادية المتكونة من 64

مربعاً (8 × 8) إلى مربعات منفصلة. مع العلم أنه لا يسمح بإجراء القطع إلا بخطوط مستقيمة فقط. ولكن بعد كل قطع يمكن أن توضع في مكان آخر الأجزاء المتكونة لكي يقطع القطع المستقيم التالي لا جزءاً واحداً وإنما عدة أجزاء. كم عدد القطعات المستقيمة الواجب القيام بها لقطع كل اللوحة إلى مربعات منفصلة؟



شكل 98. المطلوب توصيل مستويين موازيين لأحد الجوانب



شكل 99. قبل عمل القطع التالي يمكن تغير وضع الأجزاء المتكونة

حل الألغاز 101-130:

101- يمكن القيام بالعمل المطلوب بفتح ثلاث حلقات فقط. من أجل ذلك يلزم فك حلقات أحد الأجزاء وتوصل بها نهايات الأجزاء الأربعة المتبقية.

102- لحل هذه المسألة يلزم قبل كل شيء تذكر كم عدد الأرجل لدى كل من الخنفس والعنكبوت: للخنفس 6 أرجل، وللعنكبوت 8 أرجل.

بمعرفة ذلك، نفترض أنه كانت في العلبة خنافس فقط عددها ثمانية. عندئذ يكون عدد الأرجل 6 × 8 = 48 أقل بـ 6 مما هو معطى في المسألة. ولنستبدل الآن أحد الخنافس بعنكبوت. بذلك يزداد عدد الأرجل بمقدار 2 لأن للعنكبوت 6 أرجل وليس 8. من الواضح أنه لو أجرينا ثلاثة من مثل هذه التغييرات فسنوصل العدد الكلي للأرجل في العلبة إلى العدد المطلوب 54. ولكن عندئذ يبقى من الـ 8 خنافس 5 فقط أما الأخرى فستكون عناكب.

وهكذا فقد كان في العلبة 5 خنافس و3 عناكب.

لنختبر ذلك: يوجد لدى 5 خنافس 30 رجلاً، ولدى 3 عناكب 24 رجلاً والعدد الكلي هو 30 + 24 = 54، وهو المطلوب في شروط المسألة.

ويمكن حل المسألة بطريقة أخرى. وهو أنه يمكن الافتراض بوجود عناكب فقط في العلبة وعددها 8 عناكب. عندئذ يكون عدد كل الأرجل 8 × 8 = 64. أي أكثر بـ 10 أرجل مما هو مذكور في

المسألة. وباستبدال خنفس بأحد العناكب يقل عند ذاك عدد الأرجل بمقدار 2. ينبغي إجراء 5 تغييرات من مثل هذه التغييرات لكي يصل عدد الأرجل إلى العدد المطلوب أي 54. بتعبير آخر من مجموع 8 عناكب يجب إبقاء 3 فقط والباقي يستبدل بخنافس.

103- إذا ما تم شراء زوجين من الجرامق بدلاً من معطف المطر والقبعة والجرموق فقط لوجب أن لا يدفع مبلغ 20 روبلاً وإنما أقل من ذلك بمقدار ما لأن الجرموق أرخص من معطف المطر والقبعة، أي بمقدار 16 روبلاً. وبالتالي سنعرف أن ثمن زوجي الجرامق يساوي 20 - 16 = 4 روبلات، إذن يكون سعر الزوج الواحد روبلان.

والآن أصبح من المعروف أن ثمن معطف المطر والقبعة معاً هو 20 - 2 = 18 روبلاً، علماً أن معطف المطر أغلى من القبعة بمقدار 9 روبلات. وباتباع نفس الأسلوب السابق في التفكير، فنقول: فلنشتري قبعتين بدلاً من معطف المطر مع القبعة. عندئذ سندفع لا 18 روبلاً بل أقل من هذا المبلغ بمقدار 9 روبلات. وهذا يعني أن ثمن القبعتين 18 - 9 = 9 روبلات، إذن يكون ثمن القبعة الواحدة: 4 روبلات و50 كوبيكاً.

إذن يكون ثمن الحاجيات كالآتي: الجرموق: روبلين، القبعة: 4 روبلات و 50 كوبيكاً، ومعطف المطر: 13 روبلاً و 50 كوبيكاً.

104- لقد قصد البائع السلة ذات الـ 29 بيضة. ولقد كان بيض الدجاج في السلال ذات العلامات 23، 12 و 5، أما بيض البط فكان في السلال ذات العددين 14 و 6.

لنختبر ذلك. بقي من بيض الدجاج:

$$23 + 12 + 5 = 40$$

ومن بيض البط:

$$14 + 6 = 20$$

أي أن بيض الدجاج أكثر بمرتين من بيض البط وهو ما تتطلبه شروط المسألة.

105- ليس هناك ما يتطلب التفسير في هذه المسألة: فالطائرة تقوم بالتحليق في كلا الاتجاهين في وقت واحد لأن 80 دقيقة = ساعة واحدة و20 دقيقة.

وهذه المسألة موضوعة للقارئ غير المنتبه الذي يمكن أن يفكر أنه يوجد فرق ما بين ساعة واحدة و20 دقيقة و80 دقيقة. والطريف في الأمر فقد تبين أن عدد الأفراد الذين يقعون في هذا الشرك غير قليل، علماً أن أغلبهم من الناس الذين تعودوا على إجراء الحسابات وليس من ذوي الخبرة القليلة في الحساب. ويكمن السبب في هذا اعتيادهم على النظام العشري للقياس والوحدات النقدية. فهم ما أن يرون العلامة «ساعة واحدة و20 دقيقة» وبجانبها «80 دقيقة» فإنهم يعتبرون بلا قصد أن الفرق بينهما كالفرق ما بين روبل واحد و20 كوبيكاً و80 كوبيكاً. وتقوم هذه المسألة على استغلال هذا الخطأ السيكولوجي.

106- يكمن سر اللغز في أن أحد الآباء هو ابن للآخر. فلقد كان مجموع الأشخاص ثلاثة وليس أربعة: الجد والابن والحفيد.

فأعطى الجد لابنه 150 روبلاً وهذا أعطى منها 100 روبل للحفيد (أي إلى ابنه) مزيداً رأسماله بالتالي بمقدار 50 روبلاً فقط.

107- يمكن وضع قطعة الداما الأولى على أي مربع من الـ 64 مربعاً أي بـ 64 طريقة. وبعد أن وضعت القطعة الأولى يمكن أن نضع قطعة الداما الثانية على أي مربع من 63 المتبقية. أي أنه يمكن أن نضم إلى الـ 64 وضعاً لقطعة الداما الأولى الـ 63 وضعاً لقطعة الداما الثانية. ومن هنا يكون العدد الكلي للأوضاع المختلفة لقطعتي الداما على اللوحة:

$$4032 = 63 \times 64$$

108- إن أصغر عدد صحيح يمكن كتابته برقمين ليس 10، وهو ربما ما يعتقده كثير من القراء، وإنما الواحد معبراً عنه بالطريقة الآتية:

$\frac{1}{1}$، $\frac{2}{2}$، $\frac{3}{3}$، $\frac{4}{4}$، ... إلخ حتى $\frac{9}{9}$

ويستطيع من له إلمام بالجبر أن يضيف إلى هذه الصيغة صيغاً أخرى:

1^0، 2^0، 3^0، 4^0 ...إلخ حتى 9^0

لأن أي عدد أسه صفر يساوي الواحد الصحيح(*).

(*) ولكن الحلين $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو $\text{صفر}^{\text{صفر}}$ غير صحيحين لأن مثل هذه الصيغ لا معنى لها عموماً.

109– يلزم أن نضع الواحد الصحيح كمجموع كسرين:

$$1 = \frac{35}{70} + \frac{148}{296}$$

ويستطيع من له إلمام بالجبر إيراد إجابات أخرى:

$^{1-8-9}234567$ ، $^{\cdot}123456789$

وهكذا، حيث إن أي عدد أسه صفر يساوي الواحد الصحيح.

110– الطريقتان هما كالآتي:

$$10 = 9\,\frac{99}{99}$$

$$10 = \frac{9}{9} - \frac{99}{9}$$

ويستطيع من يعرف الجبر أن يضيف عدة حلول أخرى، مثلاً:

$$10 = \left(9\,\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}}$$

$$10 = {}^{9-9}99 + 9$$

111– الحلول الأربعة هي:

$$100 = 5\,\frac{3}{6} + 24\,\frac{9}{18} + 70$$

$$100 = 19\,\frac{3}{6} + 80\,\frac{27}{54}$$

$$100 = 3\,\frac{12}{60} + 9\,\frac{4}{5} + 87$$

$$100 = 49\frac{38}{76} + 50\frac{1}{2}$$

112- يمكن التعبير عن العدد 100 بخمسة أرقام متساوية، وذلك باستخدام الواحد والثلاثة وأسهلها جميعاً استخدام الخمسة.

$$100 = 11 - 111$$

$$100 = \frac{3}{3} + 3 \times 33$$

$$100 = 5 \times 5 - 5 \times 5 \times 5$$

$$100 = 5 \times (5 + 5 + 5 + 5)$$

113- غالباً ما يجاب على السؤال: 1111. ولكن يمكن كتابة العدد بقدر أكبر بعدة مرات، وهو بالذات 11 أس 11 أي 11^{11}. ولو تحليت بالصبر للقيام بالحساب حتى النهاية (يمكن بواسطة اللوغاريتمات إجراء مثل هذه الحسابات بشكل أسرع بكثير) لاقتنعت من أن هذا العدد أكبر من 280 مليارا. وبالتالي فهو يزيد على العدد 1111 بـ 250 مليون مرة.

114- يمكن لمثال القسمة المعطى أن يقابل أربع حالات مختلفة، هي:

$$1418 = 943 \div 1337174$$

$$1416 = 949 \div 1343784$$

$$1419 = 846 \div 1200474$$

$$1418 = 848 \div 1202464$$

115- إن هذا المثال يقابل حالة واحدة للقسمة:

58781 = 125473 ÷ 7375428413

نشرت كلتا المسألتين الأخيرتين الصعبتين لأول مرة في الصحيفتين الأمريكيتين «الجريدة الرياضية» في عام 1920، و«العالم المدرسي» في عام 1906.

116- يوجد في المتر المربع ألف ألف من المليمترات المربعة. كل ألف مربع مليمتري موضوعة بجانب بعضها تكون 1 م، أما الألف ألف منها فتكون 1000 م أي 1 كم، إذن سيمتد الشريط لمسافة كيلومتر كامل.

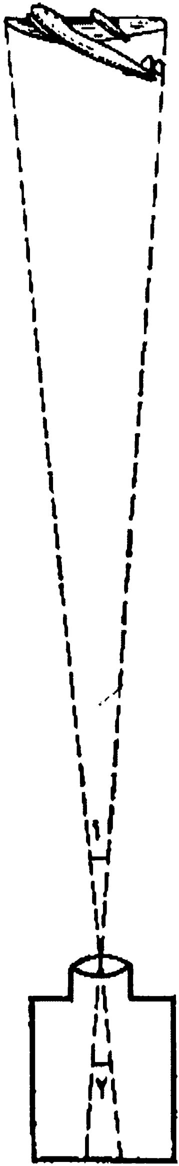
117- الإجابة مذهلة في غرابتها: كان العمود سيرتفع إلى مسافة 1000 كم.

ولنجري حساباً شفوياً. يوجد في المتر المكعب ألف × ألف × ألف مليمترات مكعبة. وكل ألف مكعب مليمتري موضع الواحد فوق الآخر يؤلف عموداً ارتفاعه 1000 م = 1 كم. وبما أنه توجد لدينا مكعبات أكثر بألف مرة، فسيكون ارتفاعها 1000 كم.

118- يتضح من الشكل 100 أن (نتيجة لتساوي الزاويتين 1 و2) المقاييس الخطية للشيء تتناسب مع المقاييس المناظرة لها في الصورة كنسبة مسافة الشيء عن العدسة إلى ارتفاع آلة التصوير. وفي حالتنا المذكورة سنرمز لارتفاع الطائرة فوق الأرض بالأمتار بالرمز س. ويكون لدينا التناسب الآتي:

0.12 : س = 8 : 12000

من هنا يكون س = 180 م.



شكل 100

119- يلزم ضرب 89.4 جم في مليون أي في ألف ألف.

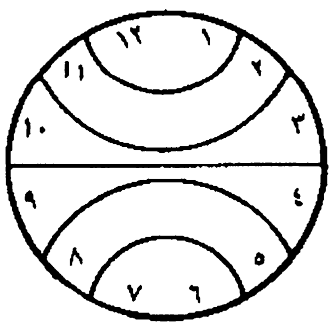
ونقوم بعملية الضرب على دفعتين: 89.4 جم × 1000 = 89.4 كجم، لأن الكيلوجرام أكبر بألف مرة من الجرام. ثم 89.4 كجم × 1000 = 89.4 طن، لأن الطن أكبر بألف مرة من الكيلوجرام.

وهكذا فالوزن المطلوب هو: 89.4 طن.

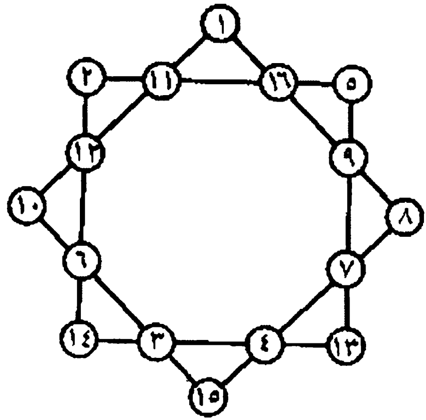
120- يمكن أن يصل عدد كل الطرق خلال الممرات من أ إلى ب إلى 70 طريقاً (ممكن حل هذه المسألة بصورة منهجية بواسطة نظرية التراكيب التي تدرس في مقرر الجبر).

121- بما أن مجموع كل الأعداد مبين على قرص الساعة ويساوي 78، فإن أعداد كل من القطاعات الستة يجب أن تساوي معاً 78 ÷ 6، أي 13. هذا يسهل عملية البحث عن الحل المبين على الشكل 101.

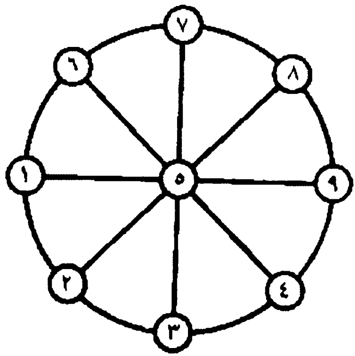
122 و 123- الحل موضح على الشكلين 102 و103 .



شكل 101



شكل 102



شكل 103

124– يمكن للمنضدة ذات الثلاث أرجل أن تمس الأرض دائماً بنهايات أرجلها الثلاث، لأنه لا يمكن أن يمر خلال كل ثلاث نقط في الفراغ سوى مستو واحد فقط، وهذا هو السبب في أن المنضدة ذات الثلاث أرجل لا تتأرجح. وكما ترى فالمسألة هندسية بحتة وليست فيزيائية.

من أجل ذلك من المستحسن استخدام الثلاث أرجل لأدوات قياس الأرض ولأجهزة التصوير. الرجل الرابعة لم تكن لتجعل الحامل أكثر استقراراً، على العكس، إذ وجب في كل مرة أن نهتم بألا يتأرجح الحامل.

125- من السهل الإجابة على سؤال المسألة لو عرفنا الوقت الذي تشير إليه العقارب. في الدائرة اليسرى (شكل 96) تشير العقارب إلى الساعة 7. وهذا يعني أنه يمتد ما بين هذه العقارب قوس يبلغ طوله $\frac{5}{12}$ من كل المحيط.

ويكون هذا بمقياس الزوايا:

$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

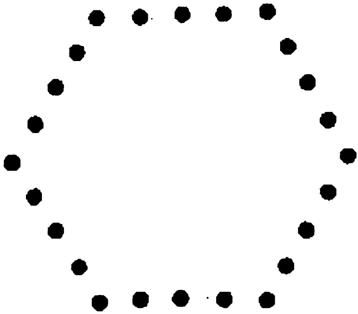
وتشير العقارب في الدائرة اليمنى، وإدراك ذلك أمر سهل، إلى الساعة 9 و 30 دقيقة. ويبلغ طول القوس ما بين طرفيهما $3\frac{1}{2}$ جزء من $\frac{1}{12}$ من كل المحيط أو $\frac{7}{24}$.

ويكون ذلك بمقياس الزوايا:

$$360^\circ \times \frac{7}{24} = 105^\circ$$

126- باعتبار أن طول الإنسان 175 سم وبالرمز لنصف قطر الأرض بالرمز نق، يكون لدينا:

$$2 \times 3.14 \times (\text{نق} + 175) - 2 \times 3.14 \times \text{نق} = 2 \times 3.14 \times 175 = 1100 \text{ سم}$$



شكل 104

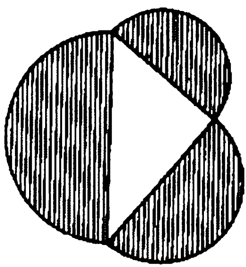
أي ما يقرب من 11 متراً. ومن العجيب هنا أن النتيجة لا تعتمد تماماً على نصف قطر الكرة، وبالتالي فهي واحدة على الشمس العملاقة والكرة الصغيرة.

127- من السهل تحقيق المطلوب في المسألة إذا ما رتبنا الأفراد في شكل سداسي الأضلاع، كما هو موضع على الشكل 104 .

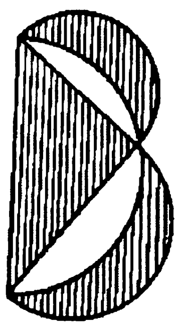
128- إن القراء الذين سمعوا بأن المسألة الخاصة بتربيع الدائرة غير قابلة للحل سيظنون أن هذه المسألة لا تحل هندسياً. فبما أنه لا يمكن تحويل الدائرة الكاملة إلى مربع متساوي القياس فإنه لا يجوز -كما يعتقد الكثيرون- تحويل التجويف المتكون من قوسي الدائرة إلى شكل قائم الزاوية.

غير أنه يمكن حل المسألة، بلا ريب، بواسطة البناء الهندسي لو استخدمنا إحدى النتائج الطريفة لنظرية فيثاغورس الشهيرة. والنتيجة التي أعنيها تنص على أن مجموع مساحات أنصاف الدوائر

المقامة على الأضلاع القائمة في المثلث القائم الزاوية تساوي نصف الدائرة المقامة على الوتر (شكل 105) وبقلب نصف الدائرة الكبيرة إلى الناحية الأخرى (شكل 106) نرى أن التجويفين المنقطين معاً متساويان في القياس مع المثلث(*). وإذا ما أخذنا المثلث متساوي الساقين فإن كل تجويف على حدة سيكون مساوياً لنصف هذا المثلث (شكل 107).

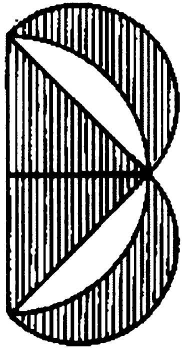


شكل 105



شكل 106

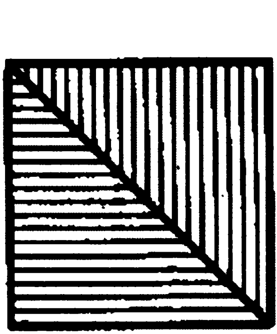
(*) تُعرف هذه الحالة في الهندسة باسم «نظرية التجاويف الهيبوقراطية».



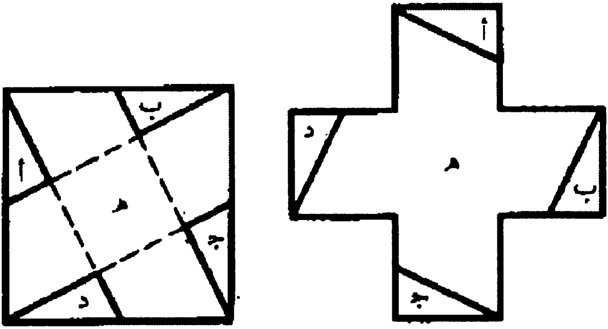
شكل 107

من هنا ينتج أنه يمكن هندسياً وبدقة رسم مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية بحيث تكون مساحته مساوية لمساحة المنجل.

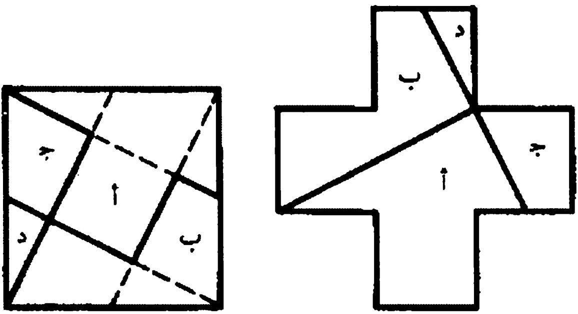
وبما أن المثلث متساوي الساقين والقائم الزاوية يتحول إلى مربع يساويه في الأبعاد (شكل 108) فإنه يمكن إحلال مربع متساوي الأبعاد محل المنجل بواسطة تركيب (بناء) هندسي بحت.



شكل 108



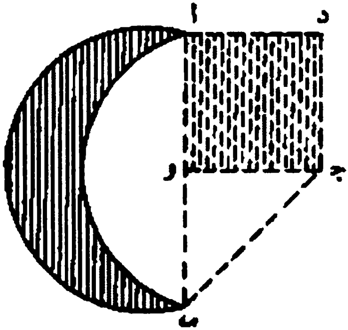
شكل 109



شكل 110

ويتبقى فقط تحويل هذا المربع إلى شكل متساوي الأبعاد على هيئة الصليب الأحمر (ويتألف كما هو معروف من خمسة مربعات متساوية موضوعة الواحد بجانب الآخر).

وتوجد عدة طرق للقيام بذلك منها الطريقتان المبينتان على الشكلين 109 و 110، وكلا التركيبين يبدآن بتوصيل رؤوس المربع إلى منتصف الأضلاع المقابلة.



شكل 111

ملاحظة هامة: يمكن أن يحول إلى صليب متساوي الأبعاد فقط شكل المنجل المتكون من قوسي دائرتين: قوس نصف الدائرة الخارجية وربع الدائرة الداخلية التي ينطبق قطرها على القطر الأكبر(*).

والآن إليك طريقة بناء الصليب المتساوي الأبعاد مع المنجل.

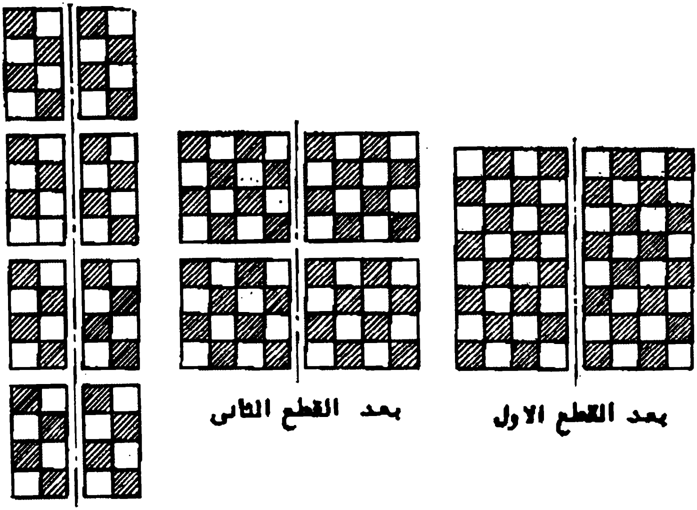
نصل الطرفين أ ، ب للهلال (شكل 111) بمستقيم، ومن منتصف هذا المستقيم و يقام عمود، بحيث يكون و ج = و أ. ويكمل المثلث المتساوي الساقين و أ ج إلى مربع و أ د ج ويجري تحويله إلى صليب بطريقة من الطرق المبينة على الشكلين 109 و110.

(*) إن الهلال الذي نراه في السماء يكون بشكل آخر بعض الشيء: فقوسه الخارجي نصف دائرة أما القوس الداخلي فنصف قطع ناقص. وغالباً ما يصوره الفنانون خطأ بشكل قوسي دائرتين.

129- إن الإمكانية الإضافية المذكورة لا تسهل المسألة: فرغم ذلك يتطلب الأمر وجود ستة مستويات قاطعة. وفعلاً فإن للمكعب الداخلي من عدد المكعبات الـ 27، التي يراد أن يقطع إليها المكعب الكبير، ستة وجوه ولا يستطيع أي مستوى قاطع أن يفتح جانبين من هذا المكعب الداخلي مرة واحدة مهما غيرنا من وضع الأجزاء.

130- لننظر أولاً ما هو أقل عدد من القطعات. فإذا ما أجرينا قطعاً واحداً عندئذ تنقسم اللوحة إلى قسمين. وعند القطع الثاني، إذا ما قطع كل منهما، سنحصل على 4 أقسام. وإذا ما وضعناها بحيث يقطع القطع الثالث كل الأقسام الأربعة، فإن عدد الأقسام يتضاعف مرة أخرى. وبعد القطع الثالث سنحصل على 8 أقسام. وبعد القطع الرابع نحصل على 16 قسماً (إذا كان القطع يقسم كل الأجزاء التي يحصل عليها قبل ذلك) بعد القطع الخامس 32 قسماً. وهذا يعني أننا بعد خمسة قطعات لا يمكن أن نحصل على 64 مربعاً منفصلاً. وفقط بعد القطع السادس عندما يتضاعف عدد الأقسام مرة أخرى نستطيع أن نحصل على 64 مربعاً منفصلاً. وهذا يعني انه لا يمكن أن نكتفي بأقل من ستة قطعات.

والآن يلزم تبيان أنه يمكن إجراء ستة قطعات فعلاً بحيث يتضاعف كل مرة عدد الأقسام وفي النهاية نحصل على 62 = 64 مربعاً منفصلاً. وليس من الصعب إجراء ذلك الآن: وينبغي فقط أن نراعي أن تكون الأقسام بعد كل قطع متساوية، وأن يقسم القطع التالي كل من الأجزاء إلى نصفين. وتظهر على الشكل 112 القطعات الثلاثة الأولى.



شكل 112

فهرس

INTERESTING MATHEMATICS

ألغاز رياضية

الرياضيات المسلية

حكايات وألغاز رياضية

يعتبر كتاب ياكوف بيريلمان «الرياضيات المسلية» من أكثر كتبه بساطة من سلسلة مؤلفاته المشهورة والمكرسة لموضوعات الرياضيات المسلية. وقد جمعت في هذا الكتاب ألغاز رياضية صِيغ الكثير منها على شكل قصص قصيرة. ويكفي لحل هذه الألغاز التعرف على الحساب الأولي وأبسط المعلومات الهندسية. وهناك جزء بسيط فقط من المسائل يتطلب المقدرة على وضع وحل أبسط المعادلات. وبغض النظر عن كون هذا الكتاب مخصصاً لتلاميذ المدارس الثانوية، إلا أنه يمكن أن يعم بالفائدة لكل من يهوى التسلية المفيدة أثناء وقت الفراغ والراحة.

الأهلية
الأردن، عمّان، وسط البلد، بناية 12، وبناية 34
ص. ب 7855 هاتف 4638688 6 00962
فاكس 4657445 6 00962 منشورات 2018